

कैलेन्डर में अंकों का जादू

लेखक : पी. के. श्रीनिवासन

Original : NUMBER FUN WITH A CALENDAR

By P. K. Srinivasan

हिंदी अनुवाद: मनीष जैन

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
31					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

जनवरी

फरवरी

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29					

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

मार्च

अप्रैल

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

मई

जून

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
31					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	30	

जुलाई

अगस्त

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

सितम्बर

अक्टूबर

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
30	31					1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

नवम्बर

दिसम्बर

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

मैं प्रसाद हूँ और कक्षा 9 का छात्र हूँ। मेरा एक छोटा भाई रवि है जो कक्षा 7 में पढ़ता है और छोटी बहन सुशीला पांचवीं में पढ़ती है।

मेरे पिताजी कपड़ों के व्यापारी हैं और उस सिलसिले में अक्सर शहर के बाहर जाते हैं। पर हर इतवार घर पर हमारे साथ ही समय बिताते हैं। उनको हमारे रोजमर्रा के जीवन में चारों ओर गणित दिखती रहती है, और शायद इसीलिए हमें बहुत से गणित के खेल खेलने आते हैं। कटोरियों से, कमरपेटी से (belt), खाली पन्नों से, रेल के टिकिट से, इत्यादि। और इन खेलों को खेलने से हम सभी भाई बहनों को गणित बहुत अच्छी लगने लगी है।

हमारी लाई हुई किसी भी चीज़ को वो एक बहुत ही आकर्षक खेल में बदल देते हैं। इसी कारण हमें विश्वास हो गया है कि ऐसा कोई खेल नहीं जिसमें गणित का इस्तेमाल न हो सकता हो।

इस साल (1988) के 1 मई को रविवार था और पिताजी घर पर ही थे। उनकी पूरे महीने की छुट्टी थी। हमारे स्कूल भी गर्मी की छुट्टियों के लिए बंद थे। मैंने पिताजी से कहा कि हम इतनी सारी वस्तुओं में गणित देख चुके हैं, क्यों न हम इस बार कैलेंडर, जिसे हम रोज देखते हैं, जिसमें इतने सारे अंक हैं, से गणित के कुछ खेल करें। फिर क्या था पूरे मई के महीने में हम सबने कैलेंडर के साथ खूब खेल खेले। पिताजी हमें कुछ संकेत देते थे और कैलेंडर पर आश्चर्यचकित कर देने वाले नमूने उभर कर आ जाते थे, जो पहले हमारे सामने हो कर भी हमसे छुपे हुए थे। तो चलिए हम अपनी वो मई के महीने की कहानी आपके सामने रखते हैं। आशा है कि आपको भी उतना ही मज़ा आएगा जितना हमने आनंद उठाया।

पहले दिन उन्होंने सुशीला से स्लेट लाने को कहा और उस पर उन्होंने 1 से लेकर 31 तक अंक इस प्रकार से लिखे

					1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31				

अब उन्होंने सुशीला से पूछा कि क्या कैलेंडर के किसी भी महीने में अंक इस प्रकार से हो सकते हैं। हमने सोचा की कैलेंडर के सारे पन्नों कि जांच कर के देखते हैं। ये करने पर भी जब हमें कुछ समझ नहीं आया तो उन्होंने कहा की उनके प्रश्न का उत्तर हमें सिर्फ गौर से देखने पर मिल जायेगा। (यही संकेत था जिसका जिक्र मैंने पहले भी किया था)।

सबसे पहले सुशीला कि बारी थी पर उसने हार मान ली। रवि थोड़ी देर देखते ही बोला कि कैलेंडर में तो 7 ही कालम् होते है पर यहाँ तो 8 कालम् हैं। इसलिए यह कैलेंडर नहीं हो सकता। मुझे भी कुछ और बातें दिखाई देने लगी और मैंने कहा कि कैलेंडर के किसी भी कालम् के अंकों में सात का अंतर होता है परन्तु यहाँ तो आठ का अंतर है इसलिए यह कैलेंडर नहीं हो सकता। अब तो सुशीला को भी कैलेंडर के नमूने समझ आने लगे। उसने मेरी बात को और समझाते हुए कहा कि कैलेंडर के कॉलम के अंकों में सात का अंतर होता है आठ का नहीं। और वह इसलिए होता है क्योंकि एक सप्ताह में सात दिन होते हैं आठ नहीं।

1. औसत और योग

पिता : देखो मई 1988 का महीना कैलेंडर में ऐसा दिखता है ।

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

रवि अब तुम मुझे कोई भी रो दिखाओ और मैं उस रो के अंको का औसत तुरंत बता दूंगा ।

रवि : दूसरी रो ।

पिता : 11 ।

मैं : हाँ हाँ, मुझे पता है, किसी भी रो या कॉलम का औसत बीच का अंक होता है ।

पिता : ध्यान रखो । हमें पता होना चाहिए कब किसी भी रो या कॉलम के बीच का अंक उस रो या कॉलम का औसत होता है । इसके लिए देखना होगा कैलेंडर की कतारों में किस तरह के अनुक्रम होते हैं ।

मैं : कैलेंडर में मुझे तीन तरह की रो दिख रही हैं । रो, कॉलम और डायगोनल (diagonal)। (क्या आपको कुछ और रो भी दिख रही हैं । (संकेत) डायगोनल भी कई तरह की हो सकती हैं) । रो के ये सभी अंक अनुक्रम समानंतर श्रेणी (Arithmetic Progression = AP) में आते हैं । रो में सभी अंको में एक का अंतर है ।

जैसे पहली रो का पहला अंक 2 है । उसमें 1 जोड़ने पर 3 आता है जो कि दूसरा अंक है । उसमें 1 जोड़ने पर 4 आता है जो तीसरा अंक है ।

पिता : और कॉलम में ?

रवि : (जो अभी तक चुप बैठा था बोला), रो या कॉलम के अंक 7 से बढ़ते हैं । जैसे पहले कॉलम का पहला अंक 1 है । उसमें 7 जोड़ने पर 8 आता है जो कि दूसरा अंक है । उसमें 7 जोड़ने पर 15 आता है जो तीसरा अंक है ।

पिता : और डायगोनल ?

में : दो तरह के डायगोनल हैं | एक जो ऊपर बाएं कोने से नीचे दायें कि तरफ तिरछी जाती हैं | जैसे 1,9,17,25 वाला डायगोनल | इस डायगोनल के अंकों में 8 का अंतर है |

दूसरी ऊपर दायें कोने से नीचे बाएं कि तरफ तिरछी जाती हैं | जैसे 7,13,19,25,31 वाला डायगोनल | इस डायगोनल के अंकों में 6 का अंतर है |

पिता : कुछ और भी डायगोनल हैं | जैसे 7,12,17,22 का डायगोनल | इसके अंकों में 5 का अंतर है | और इसी के विपरीत डायगोनल है 1,10,19,28 | इसके अंकों में 9 का अंतर है | तो देखा हमने अभी तक चार प्रकार के डायगोनल देख लिए | क्या और भी डायगोनल हैं ?

में : हाँ, देखिये 1,10,19,28 वाले डायगोनल को थोड़ा खड़ा कर दें तो एक और डायगोनल बन जाता है 1,16,31 | इसके अंकों में 15 का अंतर है |

रवि : अब तो मुझे और डायगोनल दिख रहे हैं |

पिता : इन सभी डायगोनल को दूढ़ कर लिखना आपका गृह कार्य है | इन सभी अनुक्रमों को Arithmetic Progression भी कह सकते हैं क्योंकि सभी अंकों में समान अंतर है |

रवि : पहले कॉलम के अंकों का औसत 15 है | है ना ?

पिता : बिल्कुल! अब मैं पूछता हूँ कि 17 किन किन रो का औसत है | यानी एक से ज्यादा रो हैं (संकेत) |

रवि : 3,10,17,24,31 और 5,11,17,23,29

सुशीला जो अब तक बड़े ही ध्यान से सुन रही थी बोली

सुशीला : 15,16,17,18,19,20,21 वाली रो का औसत 17 क्यों नहीं है |

रवि : 17 इस रो का बीच का अंक नहीं है | बीच का अंक 18 है, इसलिए तुम्हारी रो का औसत 18 है | पिताजी यदि हम एक रो के सभी अंकों के जोड़ को, उस रो में जितने अंक हैं, उससे भाग दे दें तो बीच का अंक आ जाएगा | क्योंकि औसत की तो यही परिभाषा है ?

पिता : चलो कर के देखते हैं | सबसे पहले कॉलम को देखते हैं |

$$\text{रवि : } \frac{(1+2+3+4+5+6+7)}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

उसी तरह पहले कॉलम को देखें तो

$$\frac{(1+8+15+22+29)}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

पिता : बिल्कुल सही! और मैं तुम्हें इन कॉलम के सभी अंको का योग/जोड़ भी बता सकता हूँ | पूछो ?

सुशीला : दूसरा कॉलम |

पिता : 77, सही है न ?

सुशीला : (कुछ देर सोचने के बाद) मैं समझ गयी | इन सातों अंकों का औसत 7 है, जो कि बीच का अंक है, तो सातों अंकों का योग 11×7 यानी 77. ये तो ठीक है पर हम चौथे कॉलम को लें तो |

रवि : हाँ! हाँ! इस कॉलम में तो बीच का अंक है ही नहीं |

पिता : फिर भी मैं इस कॉलम का योग बता सकता हूँ | वो है 58 |

सुशीला : $4 + 11 + 18 + 25 = 58$. हाँ ये तो बिल्कुल सही है | कैसे किया बताइए ना ?

पिता : देखो इस कॉलम में 4 अंक हैं | मतलब कॉलम में सम (even) अंक हैं | जब ऐसी स्थिति हो तो हम कॉलम के आखिरी अंकों को जोड़ लेते हैं और जितने अंक हैं उसके आधे से गुणा कर देते हैं | इस कॉलम के लिए $4 + 25 = 29$. कुल अंक हैं 4 | इसका आधा हुआ 2 | तो इस कॉलम का योग हुआ $29 \times 2 = 58$ |

सुशीला : जब कुल विषम अंक होते हैं तो बीच का अंक होता है परन्तु जब सम अंक होते हैं तो बीच का अंक नहीं होता |

मैं : जब कुल विषम अंक होते हैं तो बीच का अंक उनका औसत होता है | औसत को अगर कुल अंकों से गुणा करें तो सब अंको का जोड़ या योग आता है | पर जब कुल अंक सम होते हैं तो

रवि : तो बीच का अंक नहीं होता पर योग, आखिरी के दोनों अंकों के जोड़ को, कुल अंकों के आधे से गुणा करने से आ जाता है |

पिता : यह जरूरी नहीं के हम आखिरी के दो अंकों को जोड़ें | आखिरी अंकों के एक पहले और बाद के अंकों को लो और जोड़ कर देखो |

रवि : अंक हैं 4, 11, 18, 25 | 4 के बाद का अंक है 11 और 25 के पहले का अंक है 18 | इन दोनों अंकों को जोड़ने पर 29 आता है | जो कि 4 और 25 को जोड़ने पर भी आता है |

$$11 + 18 = 29 \qquad 4 + 25 = 29$$

पिता : बढ़िया! तो आखिरी के अंकों को जोड़ने के बजाए हम दोनों कोनों से सामान दूरी के अंकों को भी जोड़ सकते हैं |

मैं : पिताजी, समान दूरी के अंक आपस में एक जोड़ा बनाते हैं, और इस सभी जोड़ों का जोड़ सामान होता है । जैसे (4, 25) जोड़ा है । उसी तरह (11,18) । हर जोड़े का जोड़ समान है, जो कि 29 है । क्योंकि कुल अंक सम हैं तो ऐसे जोड़ों की संख्या अंकों से आधी होगी । कुल जोड़े $= 4 \times \frac{1}{2} = 2$ । तो अंकों का योग, जोड़े के योग को जोड़ों की संख्या से गुणा करने पर आ जाता है ।

पिता : बहुत बढ़िया! क्या मैंने तुम लोगों को कभी एक बहुत प्रसिद्ध गणितज्ञ, गौस, की कहानी सुनाई है ।

सुशीला : नहीं नहीं ! पर सुनाइए ना ।

पिता : तो सुनो । ये घटना तब कि है जब गौस तीसरी कक्षा में पढ़ता था । उसका अध्यापक काफी व्यस्त था तो उसने पूरी कक्षा को व्यवस्थित रखने के लिए एक मुश्किल अभ्यास दिया । एक से सौ तक अंकों को लिखो और उन्हें जोड़ कर कुल योग बताओ । जो ये सबसे पहले कर ले वह उत्तर लिख कर अपनी स्लेट अध्यापक कि मेज़ पर रख दे । गौस जो कि गणित कि विभिन्न गतिविधियां अपने आप ही करता रहता था, काफी उत्साहित हुआ और कुछ क्षण सोचने के बाद उसने एक आसान तरीका निकल लिया । उसने अपनी स्लेट पर 5050 लिखा और स्लेट अध्यापक कि मेज़ पर रख दी ।

रवि : क्या उसने 1 से 100 तक अंक लिखे थे ?

पिता : नहीं ।

सुशीला : तो अध्यापक तो उससे नाराज़ हुए होंगे ।

पिता : हाँ हुए थे । पर वे भी जिज्ञासु थे के गौस ने इतनी जल्दी ये अभ्यास कैसे करा ।

रवि : ओह! उसने समान जोड़ के जोड़े बनाये होंगे ।

$$1 + 2 + 3 + 4 \dots\dots\dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

हर जोड़े का जोड़ 101 है । कुल जोड़े 50 हैं । तो कुल योग $101 \times 50 = 5050$ होगा ।

मैं : ये सब उस तीसरी कक्षा के बालक ने खुद किया ।

पिता : हाँ और इस तरह उसने अपनी गणित की प्रतिभा का प्रमाण दिया ।

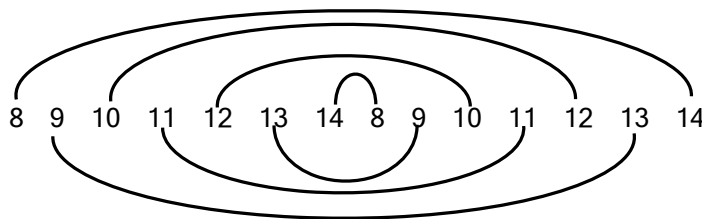
सुशीला : तो इसीलिए ही वह इतना बड़ा गणितज्ञ बना ।

मैं : पर पिताजी अगर किसी progression में सम अंक हों तो कुछ नियम हैं और विषम अंक हों तो कुछ और | क्या सभी अंकों के लिए समान नियम नहीं हो सकता ?

पिता : बहुत अच्छा सवाल है प्रसाद | नियम निकालने के लिए एक दूसरा नमूना देखते हैं | दूसरी रो के अंकों को लो और उसके बाद उसी रो को दोहरा दो |

रवि : 8 9 10 11 12 13 14 8 9 10 11 12 13 14

पिता : अब इनके कोनों से समान दूरी के जोड़े बनाओ



हर जोड़े का जोड़ कितना है ?

सुशीला : 22

पिता : कुल कितने जोड़े हैं ?

रवि : 7

पिता : सात जोड़ों का जोड़ कितना हुआ ?

सुशीला : $7 \times 22 = 154$, पर हमें तो 77 मिलना चाहिए था |

पिता : हाँ, हमने progression दो बार लिया था ना तो एक progression का जोड़ आधा होना चाहिए |

सुशीला : अच्छा, 154 का $\frac{1}{2}$ हुआ 77 | सही उत्तर मिल गया |

पिता : 8 progression का पहला अंक है और 14 आखिरी | जोड़े का योग $8 + 14$ है | कुल 7 जोड़े हैं | तो सारे अंकों का जोड़ $7 \times (8 + 14)$ हुआ | पर हमें तो progression का योग चाहिए जब सभी अंक एक बार लिखे हों | तो Progression का योग हुआ $\frac{1}{2} \times 7 \times (8 + 14)$ | तो किसी भी Arithmetic Progression के योग के सूत्र के लिए Progression के पहले अंक को A मान लेते हैं, आखिरी अंक को L, और कुल अंकों को N | तो फिर सूत्र क्या हुआ ?

रवि : $\frac{1}{2} \times N \times (A + L)$ | ये सब तो हमने उस Progression के लिए किया जिसमें विषम अंक थे, यदि सम अंक हों तो ?

पिता : वही सूत्र लागू होगा | करके देख लो | हमारा सम अंकों वाला Progression था 4, 11, 18, 25 | जैसा पहले किया था वैसे ही इस Progression को दोहराते हैं |

4 11 18 25 4 11 18 25

रवि : बीच से समान दूरी के जोड़ बनायें तो प्रत्येक जोड़े का जोड़ 29 है | कुल 4 जोड़े हैं | तो चारों जोड़ों का जोड़ 4×29 | पर हमें आधे अंक चाहियें | तो एक Progression का कुल योग हुआ $\frac{1}{2} \times 4 \times 29$ | पर सम और विषम वाली बात जो आपने दो तरीकों से शुरू में बताई कुछ जमी नहीं |

पिता : ठीक है, सूत्र को फिर से देखो | इस सूत्र को हम दो तरीकोंसे लिख सकते हैं |

$$\frac{1}{2} \times N \times (A + L) \quad \text{या} \quad \frac{(A + L)}{2} \times N$$

मैं : अच्छा! अब समझ में आया | $\frac{(A + L)}{2}$ हमारे Progression का औसत है | जब हमारे Progression

में विषम अंक हो तो औसत बीच का अंक होता है और कुल अंक N हैं | तो सूत्र हुआ $\frac{(A + L)}{2} \times N$ |

जब सम अंक हों तो हर जोड़े का जोड़ $(A + L)$ है और कुल जोड़े $\frac{N}{2}$ हैं | फिर वही सूत्र आ गया |

पिता : हाँ | इस सूत्र से ये बात और निकलती है कि किसी भी Progression का औसत $\frac{(A + L)}{2}$ है |

2. जादुई आयत

पिता : जब हम किसी भी चीज़ को दोहराता हुआ देखते हैं तो उसे क्या कहते हैं ?

सुशीला : नमूना / pattern

पिता : अच्छा तो बताओ कुछ आयतों को लेकर एक वर्ग कैसे बना सकते हैं |

सुशीला : मैं कुछ आयत लेती हूँ और एक आयत बनाती हूँ | देखिये मेरा आयत ऐसा बना |

पिता : अच्छा बना | इस आयत जैसी व्यवस्था में कुछ रो और कॉलम होते हैं और हर रो या कॉलम में कुल अंक समान हैं | इसको आयताकार मैट्रिक्स भी कहते हैं |

सुशीला : ओह! ये तो मुझे कैलेंडर में भी दिखती है | मैं दिखाती हूँ |

2	3	4	5
9	10	11	12

पिता : हाँ! इसको 2 by 4 या 2×4 आयताकार मैट्रिक्स कहते हैं | इसमें 2 पंक्ति और 4 स्तंभ हैं | क्या तुम इस में जादू ढूँड सकती हो?

सुशीला : हाँ! मुझे समझ में आ गया |

$$9 + 5 = 14$$

$$2 + 12 = 14$$

$$11 + 3 = 14$$

$$10 + 4 = 14$$

अच्छा तो ये मायावी आयत है |

रवि : मुझे तो दूसरा आयत दिख रहा है |

1	2	3
8	9	10
15	16	17
22	23	24
29	30	31

ये 5×3 की आयतकार मैट्रिक्स है | है ना ?

पिता : बढ़िया! पर इसमें जादू क्या है ?

$$1 + 10 = 11$$

$$8 + 17 = 25$$

$$3 + 8 = 11$$

$$9 + 16 = 25$$

$$2 + 9 = 11$$

$$10 + 15 = 25$$

$$15 + 24 = 39$$

$$22 + 31 = 53$$

$$16 + 23 = 39$$

$$23 + 30 = 53$$

$$17 + 22 = 39$$

$$24 + 29 = 53 \quad \text{इत्यादि।}$$

पिता : और देखो | 11, 25, 39, 53 भी एक Arithmetic Progression है।

रवि : पिताजी क्या हम एक वर्ग लेकर यही जादू देख सकते हैं?

पिता : हाँ, पर हम वर्ग का जादू दूसरे दिन देखेंगे।

सुशीला : मैं एक बड़ा आयत लेना चाहती हूँ। जैसे कि

2	3	4	5	6	7
9	10	11	12	13	14
16	17	18	19	20	21
23	24	25	26	27	28

पिता : इस मैट्रिक्स का आर्डर क्या है ?

सुशीला : 4×6 | यानि 4 रो और 6 कॉलम।

पिता : चलो इसमें जादू देखते हैं।

$$2 + 28 = 30$$

$$9 + 21 = 30$$

$$3 + 27 = 30$$

$$10 + 20 = 30$$

$$4 + 26 = 30$$

$$11 + 19 = 30$$

$$5 + 25 = 30$$

$$12 + 18 = 30$$

$$6 + 24 = 30$$

$$13 + 17 = 30$$

$$7 + 23 = 30$$

$$14 + 16 = 30$$

मैं : इस मैट्रिक्स से हम अगर छोटी आयताकार मैट्रिक्स निकालें तो और कुछ मजेदार दिख सकता है।

पिता : हाँ! पर अभी उसके बारे में बात नहीं करते हैं।

3. अधूरे जादुई वर्ग

में : तो अब हम कैलेंडर में से वर्ग खोज कर उसमें जादू देखेंगे ।

पिता : हाँ! पर पहली बारी सुशीला की है ।

सुशीला : कितने आर्डर की मैट्रिक्स निकालें पिताजी ?

पिता : शुरुआत में 2 X 2 कि एक मैट्रिक्स निकालते हैं ।

सुशीला : ठीक है ना

1	2
8	9

3	4
10	11

में : क्यों नहीं । और ये भी ।

10	11
17	18

20	21
27	28

पिता : बिल्कुल ठीक! पर इसमें जादू क्या है ?

सुशीला : $1 + 9 = 10$ $3 + 11 = 14$ $10 + 18 = 28$ $20 + 28 = 48$

$2 + 8 = 10$ $4 + 10 = 14$ $11 + 17 = 28$ $21 + 27 = 48$

में : डायगोनल में जो अंक हैं उनका जोड़ समान है । चलो 3 x 3 की वर्गाकार मैट्रिक्स ले कर देखते हैं ।

रवि : मैं बनाता हूँ ।

1	2	3
8	9	10
15	16	17

diagonal में जो अंक हैं उनका जोड़ है

$$1 + 9 + 17 = 27$$

$$3 + 9 + 15 = 27$$

पिता : और बीच की रो और कॉलम के अंकों का ?

सुशीला : $8 + 9 + 10 = 27$ ये तो हुआ बीच कि रो का ।

अब बीच के कॉलम का देखती हूँ । $2 + 9 + 16 = 27$

अरे वाह! ये दोनों जोड़ एक सामान हैं । ये 3×3 मैट्रिक्स ज्यादा मज़ेदार है । पर पहली और तीसरी रो के जोड़ अलग क्यों हैं । उसी तरह पहले और तीसरे कॉलम के अंकों का जोड़ समान क्यों नहीं हैं ।

पिता : हाँ, अगर ऐसा होता तो उसे एक पूर्ण वर्ग कहते ।

रवि : तो ये एक अपूर्ण वर्ग है । पिताजी मुझे एक रोचक बात दिख रही है । इस तरह के वर्ग में ये जादुई जोड़ बीच के अंक को तीन (जो कि मैट्रिक्स का आर्डर है) से गुणा करने पर आ जाता है ।

मैं : क्या ये हमेशा होता है । मैं एक और मैट्रिक्स बना कर जांचता हूँ ।

12	13	14
19	20	21
26	27	28

बीच का अंक 20 है और मैट्रिक्स का आर्डर 3 है । तो जोड़ हुआ $20 \times 3 = 60$ ।

डायगोनल के अंकों का जोड़

$12 + 20 + 28 = 60$ और $14 + 20 + 26 = 60$

सुशीला : बीच की रो का जोड़ है

$19 + 20 + 21 = 60$ और $13 + 20 + 27 = 60$

मैं : हम 4×4 का वर्ग भी बना सकते हैं ।

पिता : ये देखने की बात है कि हम कैलेंडर में 4×4 की ही मैट्रिक्स बना सकते हैं । 5×5 का वर्ग बनाने के लिए जितने अंक चाहिए उतने कैलेंडर में नहीं होते हैं ।

मैं : ऐसा क्यों पिताजी? 5×5 वर्ग में तो 25 अंकों की ज़रूरत है और कैलेंडर में तो 31 तक अंक होते हैं ।

पिता : वो तो ठीक है पर देखो कि कैलेंडर में हर रो में 7 अंक हैं । अगर हमें 5×5 का वर्ग बनाना हो तो कम से कम $7 \times 5 = 35$ अंकों की ज़रूरत होगी । ये इसलिए क्योंकि कैलेंडर में हमें हर रो में रविवार से लेकर शनिवार तक 7 अंक भरने हैं ।

मैं : ओह! क्योंकि कैलेंडर में 7 कॉलम हैं तो हम 7×7 का वर्ग बना सकते हैं पर उसके लिए और ज्यादा 49 अंक चाहिए होंगे |

पिता : चलो अब 4×4 का वर्ग लेकर उसमें जितने रोचक जादू हैं उन्हें ढूँढते हैं |

रवि :

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28

ये एक 4×4 मैट्रिक्स है |

सुशीला : $4 + 12 + 20 + 28 = 64$

$7 + 13 + 19 + 25 = 64$

पिता : $5 + 6 + 26 + 27 = 64$

$11 + 14 + 18 + 21 = 64$

$12 + 13 + 19 + 20 = 64$

$4 + 7 + 25 + 28 = 64$

तुम लोग देख रहे हो कि मैंने क्या किया | मैंने दो बार 32 के पूरक जोड़े ले लिए |

मैं : हाँ! ये बात ठीक है | जब हम आयत पर काम कर रहे थे तो हमने पूरक जोड़े लिए थे पर एक बार |

रवि : पिताजी क्या हम इन अंकों को ऐसे व्यवस्थित कर सकते हैं जिससे ये वर्ग एक पूर्ण जादुई वर्ग बन सके ?

पिता : ये अच्छा सवाल है और इसके बारे में हम आगे चर्चा करेंगे | यदि तुम लोग उत्सुक हो तो उसका हल प्रयत्न-त्रुटि विधि से निकाल सकते हो | इस विधि में हम अंकों को अलग अलग तरीकों से व्यवस्थित कर के देखेंगे और उसमें फेर बदल करते रहेंगे जिससे हम हल कि ओर बढ़ेंगे | पर अभी की बात देखें तो तुम एक बात देखने से चूक गए हो | 3×3 वाले वर्ग में तो जोड़ बीच वाले अंक को तीन से गुणा करने पर आ जाता है | पर 4×4 वाले वर्ग में ये जोड़ कैसे आएगा, क्योंकि इसमें कोई बीच का अंक तो है ही नहीं |

2	3	4	5
9	10	11	12
16	17	18	19
23	24	25	26

मैं : बीच का अंक नहीं है इसीलिए हम कोने के दोनों अंकों को लेकर दो से गुणा करेंगे | इसी तरह यदि 6×6 का वर्ग होगा तो कोने के अंकों को तीन से गुणा करने पर जादुई जोड़ आएगा | जैसे कि इस 4×4 वर्ग में देखते हैं |

रवि : इस वर्ग का जादुई जोड़ है $(2 + 26) \times 2 = 56$

सुशीला : हाँ और मैं तो ये 5 और 23 को जोड़ कर उसे 2 से गुणा कर भी निकाल सकती हूँ |

पिता : हाँ, ये जोड़ निकालने के लिए ऐसे ही और भी कई तरीके हैं |

रवि : अगर हम वर्ग के सभी अंकों का जोड़ निकालना चाहें तो ?

पिता : कोई भी 3×3 का वर्ग लो और मुझे उसका ऊपर का सबसे बायाँ अंक बता दो, तो मैं उस पूरे वर्ग का जोड़ बता सकता हूँ |

सुशीला : मैं एक 3×3 का वर्ग चुनती हूँ और उसका सबसे ऊपर और सबसे बायाँ अंक 12 है | अब आप इस वर्ग का जोड़ बताइए |

पिता : वर्ग के सभी अंकों का जोड़ 180 है |

सुशीला : मैं जांच करके देखती हूँ |

12	13	14	
19	20	21	
26	27	28	
57	60	63	180

बिल्कुल ठीक!

रवि : मैं समझ गया | बीच के अंक को 9 से गुणा कर देते हैं |

सुशीला : पर मैंने तो बीच का अंक नहीं बताया था |

रवि : ऊपर के सबसे बाएँ अंक में 8 जोड़ने से 3×3 वर्ग के बीच का अंक आ जाता है |

मैं : ऊपर का बायाँ अंक ही क्यों अगर ऊपर का सबसे दाहिना अंक दिया हो तो उसमें 6 जोड़ने पर बीच का अंक आ जाएगा, और फिर उसे 9 से गुणा करने पर पूरे वर्ग का जोड़ |

पिता : बहुत अच्छे ! तुम लोगों ने इस जादू का पूरा रहस्य खोज निकला |

मैं : मैं आगे बढ़ता हूँ | कोई भी 4×4 का वर्ग लेकर मुझे उसके ऊपर का सबसे बायाँ अंक बता दो, और मैं उस वर्ग का जोड़ बता दूंगा |

सुशीला : मेरे 4 x 4 वर्ग का ऊपर से सबसे बायां अंक 4 है ।

मैं : वर्ग के अंकों का जोड़ 256 है

सुशीला : मैं जांचती हूँ ।

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28
58	62	66	70
256			

रवि : रुको रुको! मैं इस जादू का रहस्य बताता हूँ । सबसे पहले हम वर्ग के 4 से शुरू होती हुए डायगोनल के अंकों का जोड़ निकलते हैं । उसके लिए हमें नीचे के सबसे दायें अंक 28 निकलना पड़ेगा । उसके लिए हम 8 गुणा 3 में 4 जोड़ेंगे, क्योंकि हमारे इस डायगोनल Arithmetic Progression में हर अंक में 8 का अंतर है और हमें इस Progression का चौथा अंक चाहिये ($8 \times 3 + 4 = 28$) । अब 4 और 28 को जोड़ते हैं तो 32 आता है, उसे 2 से गुणा करने पर 64 आता है जो 4 से शुरू होती हुई डायगोनल के अंकों का जोड़ है । इसको पुनः 4 से गुणा करने पर 256 आता है जो कि हमारे वर्ग का जोड़ है । यहाँ हमने 4 से उसलिये गुणा किया क्योंकि ये 4x4 वर्ग है जैसे हमने 3x3 वर्ग में डायगोनल जोड़ को 3 से गुणा किया था

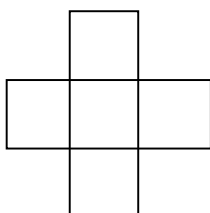
पिता : बहुत बहुत बढ़िया! मैं बहुत खुश हूँ ।

4. क्रॉस पहेली

पिता : कैलेंडर में अंकों कि व्यवस्था हमें कुछ क्रॉस पहेलियाँ बनाने और समझने का तरीका भी बताती हैं ।

सुशीला : आप हमें ऐसी पहेली दीजिए और हम उसे हल करेंगे ।

पिता : ये है एक और इसे हम तीसरे आर्डर के क्रॉस पहेली कहेंगे ।



इस आकृति के सभी खानों में ऐसे अंक भरो ताकि रो और कॉलम के अंकों का जोड़ समान हो ।

सुशीला : इसके तो बहुत सारे उत्तर हैं पर मैं आपको दो बताती हूँ ।

	3	
9	10	11
	17	

	13	
19	20	21
	27	

पिता : बढ़िया! चलो अब मैं तुम्हे इस क्रॉस का जोड़ बताता हूँ जो कि 42 है, अब क्या तुम इस तीसरे डिग्री के क्रॉस को पूरा भर सकते हो।

रवि : सबसे पहले हम बीच का अंक पता लगाते हैं । वो है $42/3 = 14$ । अब 14 में से 7 घटा कर ऊपर के खाने में 7 आएगा और नीचे के खाने में 14 में 7 जोड़ कर 21 आएगा । अब 14 में 1 घटा कर बाएं खाने में 13, उसी तरह दायें खाने में 15 आएगा।

मैं : हमें यदि कैलेंडर जैसे उत्तर चाहियें तो हम 7 और 1 को घटाते बढ़ाते हैं । कैलेंडर के अतिरिक्त उत्तरों के लिए हम कुछ दूसरे अंक भी घटा बढ़ा सकते हैं । जब हमने बीच का अंक निर्धारित कर लिया हो तो, एक दूसरा सरल अंक जैसे कि 3 घटा सकते हैं । इससे ऊपर और नीचे के अंक 11 और 17 हो जायेंगे। इसी तरह 2 के प्रयोग से बाएं और दायें के अंक 12 और 16 हो जायेंगे ।

	11	
12	14	16
	17	

रवि : क्या हम 3 से ज्यादा बड़े आर्डर की पहेली नहीं बना सकते ?

मैं : तीसरे आर्डर के पहेली के बगल में ही हम पांचवें आर्डर की पहेली बना सकते हैं ।

सुशीला : कैलेंडर जैसी व्यवस्था के अतिरिक्त मैं पहेली हल करती हूँ। पर पहले जोड़ तो बताइए ।

मैं : चलो मान लो कॉलम का जोड़ 55 है ।

सुशीला : बीच का अंक 11 है | 2 को बार बार घटा कर हमें 9 और 7 अंक मिलेंगे | इसी तरह 2 को जोड़ कर 13 और 15 | इसी तरह रो के अंकों के लिए 3 को घटाने पर 8 और 5 मिलेंगे और जोड़ने पर 14 और 17 | इस तरह से इस पहेली का उत्तर निम्नलिखित होगा |

		7		
		9		
5	8	11	14	17
		13		
		15		

रवि : मुझे एक दूसरा तरीका भी समझ में आ रहा है | क्यों ना हम कोई भी दो पांच अंकों के Arithmetic Progressions को ले लें, जिसका बीच का अंक 11 हो | अब उन अंकों को हम इस पहेली में बिठा सकते हैं |

पिता : बढ़िया! इससे मिलता जुलती एक और पहेली को देखते हैं | हमारे पास 5 लगातार अंक हैं| 25 26 27 28 और 29| अब इन अंकों को इस पहेली में कैसे बिठाओगे |

रवि : बीच का अंक तो इस क्रम के भी बीच का होगा | तो 27 बीच में आ जाएगा | तो उत्तर होगा |

		26		
25	27	29		
		28		

जब हम 2 और 1 को बीच के अंक से घटाने और बढ़ाने के लिए चुनते हैं, तो हमें ये अंकों के व्यवस्था मिल जाती है | और तो और ये अंक लगातार हों ऐसा ज़रूरी नहीं| ये Arithmetic Progression में हो बस इतना ही ठीक है |

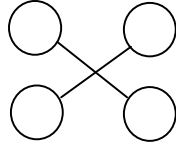
सुशीला : मैं कोशिश करती हूँ |

		11		
7	15	23		
		19		

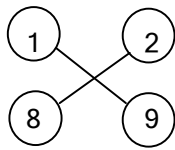
मुझे हल मिल गया |

5. स्टार पहेलियाँ

पिता : हमने क्रॉस की पहेलियाँ देखीं। अब चलो स्टार पहेलियाँ देखते हैं। ये आर्डर 2 की पहेली है। तुम इसका हल कैसे निकालोगे जिससे की दोनों डायगोनल अंकों का जोड़ सामान होगा।



सुशीला : अगर हम कैलेंडर का इस्तमाल करें तो बहुत आसान होगा।



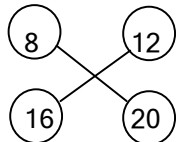
ये एक उत्तर है जिसमें डायगोनल अंकों का जोड़ 10 है।

रवि : अगर आप मुझे एक जोड़ दोगे तो मैं स्टार को भर सकता हूँ।

पिता : ठीक है। जोड़ 28 के लिए भरो।

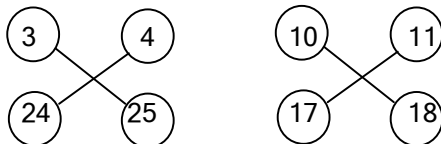
रवि : 28 को दो अलग तरीकों से, दो अंकों के जोड़ की तरह लिखना होगा।

$28 = 20 + 8$; $28 = 12 + 16$; ये है इसका हल



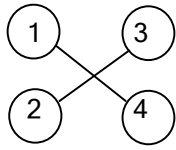
पिता : 20 और 8 को complementary pair (युगल) कहते हैं। उसी तरह 12 और 16 हैं। अगर हम चाहें तो इस भाषा का प्रयोग कर सकते हैं।

सुशीला : पर ये कैलेंडर के जैसा हल नहीं है। अगर हम कैलेंडर का प्रयोग करें तो ये अंक भर सकते हैं।



रवि : क्या हम consecutive अंकों को नहीं भर सकते हैं।

सुशीला : मुझे समझ आ गया ।

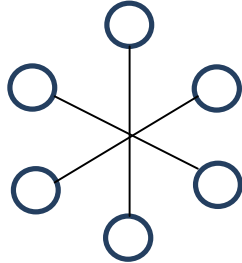


मुझे सामान दूरी के अंकों को लेना पड़ेगा ।



मैं : बढ़िया ! अगर हम आर्डर 3 का स्टार लें तो उसे कैसे भरेंगे ।

रवि : 3 आर्डर के जादुई वर्ग के अंकों से इस पहेली को भर सकते हैं । सिर्फ बीच के अंक को छोड़ना होगा ।

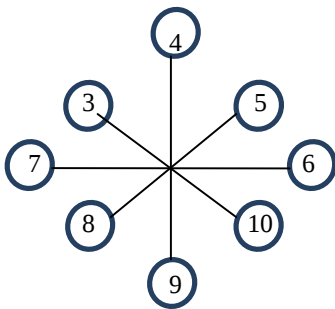


रवि : अरे ये तो तीसरे आर्डर के वर्ग के अंकों होंगे, बीच के अंक को छोड़ कर ।

मैं : ये बात भी दिखती है कि complimentary अंकों की कुल जोड़ियाँ और स्टार पहेली का आर्डर बराबर हैं ।

पिता : बिल्कुल! देखो इन 8 consecutive अंकों को इस्तेमाल कर हम 4 आर्डर की स्टार पहेली बना सकते हैं ।

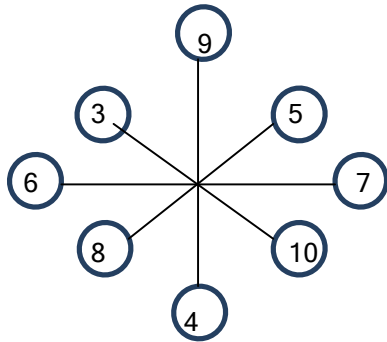
रवि : 4 जोड़े इस प्रकार से होंगे (3,10), (4,9), (5,8), (6,7) । स्टार ऐसे बनेगा ।



मैं : 3 ,4 ,5,6 एक दिशा के consecutive खानों में हैं और बचे हुए 7,8,9,10 बचे हुए consecutive खानों में हैं ।

पिता : क्या ऐसा ज़रूरी है ?

रवि : नहीं ज़रूरी नहीं है | ऐसे भी हो सकता है



मैं : बढ़िया ! और किसी भी साधारण progression के अंकों से हम स्टार की पहेली बना सकते हैं |

6. पूर्ण जादुई वर्ग

पिता : अब रवि के सवाल पर ध्यान देते हैं | किसी वर्ग के अंकों को हम अलग तरीके से रख कर क्या हम एक पूर्ण जादुई वर्ग बना सकते हैं |

सुशीला : आपका मतलब सभी रो (रो, कॉलम, डायगोनल) का जोड़ बराबर होगा |

पिता : बिल्कुल ! चलो कोशिश करते हैं |

रवि : वाह, बहुत मज़ा आएगा |

पिता : कैलेंडर के किसी भी 2 आर्डर के जादुई वर्ग से शुरुआत करते हैं |

सुशीला : ये एक 2 आर्डर का वर्ग है

1 2

8 9

मैं कितनी भी कोशिश करूँ इसका पूर्ण जादुई वर्ग नहीं बना सकती हूँ |

रवि : ये बिल्कुल ठीक बोल रही है | ये नामुमकिन है |

मैं : चलो अब एक 3 आर्डर का वर्ग ले कर देखते हैं

1	2	3
8	9	10
15	16	17

सुशीला : मैं जांचती हूँ ।

$$8 + 9 + 10 = 27$$

$$2 + 9 + 16 = 27$$

$$17 + 9 + 1 = 27$$

$$3 + 9 + 15 = 27$$

रवि : तुम तो बड़ी तेज हो !

सुशीला : ऐसा नहीं है । असल में ये सारे अंक कैलेंडर के योज्य अनुक्रम (Additive Sequence) में हैं । तो उनका योग $9 \times 3 = 27$ होगा ।

रवि : जादुई जोड़ $9 \times 3 = 27$ होगा । अब इन सब अंकों को एक वर्ग में लिख कर जादुई वर्ग बनाना है । पिताजी थोड़ी मदद करो ना ।

पिता : हम कुछ अंक लिख कर फिर देख परख कर, मिटा कर फिर लिख कर कर इस वर्ग को भर सकते हैं । इसे परीक्षण-त्रुटी विधि (trial and error) कहते हैं । पर इसमें बहुत समय लगेगा । इस पहेली में एक छुपा हुआ पैटर्न है । उसे कैसे देखना है, पहले यह समझते हैं । 1,2,3 से 8,9,10 कैसे बना सकते हैं ?

सुशीला : सभी में 7 जोड़ कर ।

रवि : और 1,2,3 में 14 जोड़ कर 15,16,17 की आखिरी रो बना सकते हैं ।

पिता : बढ़िया ! और 1,2,3 से 1,2,3 कैसे बनाया ।

सुशीला : 1,2,3 में 0 जोड़ कर ।

पिता : और अब हम दो सहायक लैटिनी वर्ग बनायेंगे । एक 1,2,3 से और दूसरा 0,7,14 से ।

मैं : ये लैटिनी वर्ग क्या है पिताजी ?

पिता : मैं समझाने ही वाला था | लैटिनी वर्ग में रो और कॉलम में समान अंक ही होते हैं पर किसी भी रो या कॉलम में वहीं अंक दोबारा नहीं आता |

रवि : और डायगोनल में?

पिता : हम डायगोनल को भूक सकते हैं| डायगोनल में अंक दोबारा भी आ सकते हैं |

सुशीला : तो क्या रो, कॉलम और डायगोनल के अंकों का जोड़ बराबर होगा |

पिता : नहीं| सिर्फ इतना ही काफी है की रो और कॉलम के अंकों का जोड़ बराबर हो |

रवि : तो फिर 2 आर्डर का लैटिन वर्ग बन सकता है जैसे

1	2
2	1

सुशीला : चलो मैं 1,2,3 से एक लैटिन वर्ग बनाती हूँ| 2 बीच के खाने में होना चाहिए |

1		
	2	
		3

1	3	2
3	2	1
2	1	3

हाँ मैंने बना दिया |

रवि : और मैंने 0,7,14 से लैटिन वर्ग बना दिया

0	14	7
14	7	0
7	0	14

सुशीला : पिताजी ये तो बिल्कुल मेरे जैसा है |

मैं : हाँ| और इस तरह से अंकों को बदल सकते हैं |

1 ---> 0

2 ---> 7

3 ---> 14

पिता : बढ़िया | और तीर का मतलब है "अंक को बदल दो" | चलो अब दोनों लैटिन वर्गों को जोड़ कर नया वर्ग बनाते हैं | वर्ग के हर अंक को दूसरे वर्ग के उसी जगह वाले वर्ग से जोड़ कर| इसे मैट्रिक्स का जोड़ भी कहते हैं |

सुशीला : मैं करती हूँ|

1+0	3+14	2+7
3+14	2+7	1+0
2+7	1+0	3+14

ऐसा करने से ये वर्ग बनेगा

1	17	9
17	9	1
9	1	17

रवि : अरे वाह| पिताजी ये तो दूसरा लैटिन वर्ग बन गया |

पिता : अगर तुम 0,7,14 को किसी दूसरे पैटर्न से लैटिन वर्ग बना कर जोड़ते हो तो क्या होगा ?

मैं : करके देखता हूँ| पहले 1,2,3 का क्रम ऊपर के बाएं खाना से नीचे के दाहिने खाने की ओर था | अब मैं 0,7,14 को ऊपर दाहिने से नीचे बाएं के तरफ से लिखता हूँ |

		0
	7	
14		



7	14	0
0	7	14
14	0	7

रवि : अब मैं दोनों वर्गों के सभी खानों को क्रमशः जोड़ती हूँ |

1	3	2
3	2	1
2	1	3

+

1	3	2
3	2	1
2	1	3

=

8	17	2
3	9	15
16	1	10

पर ये तो लैटिन वर्ग नहीं है| क्या ये जादुई वर्ग है ?

रवि : आहा, मुझे समझ आ गया| ये भी कैलेंडर के अंकों का 3 आर्डर का वर्ग है | पर ये पूर्ण है या अपूर्ण?

सुशीला : मैं बाकी रो और कॉलम के जोड़ को जांचती हूँ |

$$8 + 17 + 2 = 27$$

$$16 + 1 + 10 = 27$$

$$8 + 3 + 16 = 27$$

$$2 + 15 + 10 = 27$$

हाँ ये बिल्कुल जादुई वर्ग है |

पिता : खाली ये ही नहीं, इस वर्ग में कुछ और भी जादुई चीज़ें नज़र आती हैं ।

सुशीला : वो क्या हैं पिताजी ?

पिता : अब सभी अंकों को उन्ही से गुणा कर उसी जगह लिख दो

रवि : ये ठीक है ना ?

64	289	4
9	81	225
256	1	100

मैं : अब हमें ये देखना चाहिए की क्या ये एक जादुई वर्ग है ? जांचने पर मैंने ये पाया की ये अशुद्ध जादुई वर्ग है, एक अलग तरह का जादुई वर्ग है ।

64	289	4	357
9	81	225	
256	1	100	357
329		329	

पिता : इसका क्या मतलब है ?

मैं : बीच की रो और कॉलम का जोड़ समान होने की बजाय यहाँ पर सिर्फ आखिरी की रो और कॉलम का जोड़ सामान है ।

पिता : हाँ, पर इससे एक और पहेली का हल निकलता है । इस तरीक़े से हम एक ही अंक को, दो अलग अलग तरीकों से, 3 वर्गों(squares) के जोड़ से निकाल सकते हैं ।

रवि : हमें ये भी देखना चाहिए। सचमुच ये बहुत ही रोचक है ।

मैं : क्या हम 4 आर्डर के अपूर्ण जादुई वर्ग के अंकों को इधर उधर करके जादुई बना सकते हैं ।

पिता : बिलकुल । और ये तुम भी कर सकते हो ।

मैं : पिताजी, हमें देखिये। हम निम्न अंक लेते हैं,

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

हम इन दो अंकों के सेट (set) को क्या कहेंगे । इस वर्ग के दो सेट में पहला 1,2,3,4 अंकों का है और दूसरा 0,7,14,21 का है ।

पिता : 1,2,3,4 को हम बेसिक अंक (Basic Numbers) कहते हैं और 0,7,14 ,21 को रूट अंक (Root Numbers) कहते हैं ।

मैं : सबसे पहले हम बेसिक अंकों से लैटिन वर्ग बनाते हैं | उसके बाद ही हम रूट अंकों से लैटिन वर्ग बना पायेंगे |

सुशीला : 4 आर्डर के वर्ग में कोई भी बीच का अंक या बीच की रो या कलम नहीं है | तो कैसे शुरू करें |

रवि : मैं कोशिश करती हूँ |

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

पिता : बढ़िया ! चलो मैं अब रूट अंकों से लैटिन वर्ग बनाने की कोशिश करता हूँ | एक डायगोनल में सिर्फ 4 आ रहे हैं | तो रूट अंक के लैटिन वर्ग में दूसरे डायगोनल में 21 आना चाहिए |

21			
	21		
		21	
			21

→

21	0	7	14
14	21	0	7
7	14	21	0
0	7	14	21

1,2,3,4 ऊपर के रो में हैं तो इसमें 0,7,14 ,21 नेचे की रो में होने चाहिए |

रवि : चलो अब मैं दोनो वर्गों को जोड़ता हूँ |

1+21	0+2	3+7	4 +14
2+14	3+21	4 +0	7+1
3+7	14 +4	1+21	2+0
4 +0	1+7	2+14	3+21

=

22	2	10	18
16	24	4	8
10	18	22	2
4	8	16	24

ये तो बिल्कुल गलत है |

सुशीला : हाँ 24 दो बार आ रहा है, 8, 10 और 18 भी दो बार आ रहे हैं | कुछ गड़बड़ है| डायगोनल के जोड़ भी अलग अलग हैं | ये तो कैलेंडर से निकलने वाला अधूरा जादुई वर्ग जैसा भी नहीं है |

मैं : हाँ, और ये लैटिन वर्ग भी नहीं हैं | पिताजी मदद करो | हमें कुछ समझ नहीं आ रहा है |

पिता : लैटिन वर्ग बनाने के भी विभिन्न तरीके हैं | अब मैं तुम्हें 1,2,3,4 से एक उपयुक्त लैटिन वर्ग बना कर दिखाता हूँ |

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

मैं : आहा ! ये तो लैटिन वर्ग है | चलो मैं अब इस वर्ग के अंकों को बदल कर दूसरा लैटिन वर्ग बनता हूँ |

1 --->0

2 --->7

3 --->14

4 --->21

और फिर दोनों लैटिन वर्गों के अंकों को जोड़ कर जादुई वर्ग बनायेंगे |

रवि : करके देखते हैं |

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

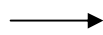
+

0	7	14	21

मैं : रुको ! हमें दूसरा लैटिन वर्ग अलग तरीके से बनाना पड़ेगा |

रवि : ठीक है | हम पहले लैटिन वर्ग का पैटर्न बदल कर फिर उसके अंक बदल कर लैटिन वर्ग बनाएंगे |

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1



0	14	7	21
7	21	0	14
14	0	21	7
21	7	14	0

मैं : बढ़िया ! आगे बढ़ो |

रवि : अब हमें दोनों वर्ग जोड़ने चाहियें

1	2	3	4		0	14	7	21
3	4	1	2	+	7	21	0	14
2	1	4	3		14	0	21	7
4	3	2	1		21	7	14	0

सुशीला : ऐसा करना पर ये मिलेगा

1	16	10	25
10	25	1	16
16	1	25	10
25	10	16	1

मैं : ओह ! पर अब तो ये 1, 10, 16, 25 का लैटिन वर्ग बन गया |

पिता : देखो | मैंने जो बेसिक अंकों से लैटिन वर्ग बनाया था उसको थोड़ा और गहराई से समझना पड़ेगा |

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

मैं : हाँ मुझे मिल गया | आप बताओ ठीक है कि नहीं| इस 4 आर्डर के वर्ग को हम 2 आर्डर के चार वर्गों में बाँट सकते हैं |

1	2	3	4	2	1	4	3
3	4	1	2	4	3	2	1

हर डायगोनल का जोड़ 5 है| पहले और तीसरे वर्ग एक दूसरे की परछाई या reflection जैसे हैं | उसी तरह दूसरे और चौथे वर्ग भी एक दूसरे की परछाई जैसे हैं |

पिता : बहुत अच्छे | तो अब अगर हम रूट अंक 0,7,14 ,21 से दूसरे पैटर्न का लैटिन वर्ग बनाना चाहें तो कैसे बनायेंगे |

रवि : डायगोनल के जोड़ समान नहीं होने चाहिए परन्तु रो और कॉलम के जोड़ समान होने चाहिए| ठीक है ना ?

पिता : ध्यान दो की 1,2,3,4 में हमने अंक इस तरह से चुन कर बराबर दूरी पर रखे हैं जिससे की डायगोनल अंकों का जोड़ बराबर हो ।

मैं : तो हमें (0,21) और (7,14) ऐसे चुनने चाहिए ।

रवि : तो क्या हम इससे 2 आर्डर के चार वर्ग बना लें ।

0	21
21	0

7	14
14	7

21	0
0	21

14	7
7	14

पिता : ठीक। अब हम इनसे 4 आर्डर का लैटिन वर्ग कैसे बनायेंगे। ध्यान दो कि हमारे 4 आर्डर वाले लैटिन वर्ग में एक छोटा वर्ग और उसका परछाई वाला वर्ग एक दूसरे के नीचे डायगोनल के साथ जुड़े हुए हैं ।

0	21		
21	0		
		21	0
		0	21

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

रवि : चलो अब मैं दोनों लैटिन वर्गों को जोड़ता हूँ ।

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

+

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

=

1	23	17	11
24	4	8	16
9	15	25	3
18	10	2	22

मैं : पिताजी हमने बिल्कुल ठीक कर दिया ।

सुशीला : मैं जांच कर देखती हूँ ।

1	+	23	+	17	+	11	=	52
24	+	4	+	8	+	16	=	52
9	+	15	+	25	+	3	=	52
18	+	10	+	2	+	22	=	52
1	+	24	+	9	+	18	=	52
23	+	4	+	15	+	10	=	52
17	+	8	+	25	+	2	=	52
11	+	16	+	3	+	22	=	52
1	+	4	+	25	+	22	=	52
11	+	8	+	15	+	18	=	52

अरे वाह! ये तो बिल्कुल बढ़िया 4 आर्डर का जादुई वर्ग है ।

मैं : पिताजी मेरा एक सवाल है । कैलेंडर में तो रूट अंक 0,7,14 ,21 थे । जो की सात का पहाड़ा है । क्या हम जादुई वर्ग किसी और अंक के पहाड़े को लेकर नहीं बना सकते ?

रवि : तुम्हारा मतलब है की रूट अंक 0,6,12,18 या 0,4 ,8,12 को लेकर जादुई वर्ग बनायें ।

मैं : हाँ बिल्कुल ।

पिता : क्यों नहीं ! करके देखते हैं ।

सुशीला : मैं 1,2,3 और 0,4,8 को लेकर 3 आर्डर का जादुई वर्ग बनाने की कोशिश करती हूँ ।

रवि : और मैं 1,2,3,4 और 0,6,12,18 को इस्तेमाल कर 4 आर्डर का जादुई वर्ग बनाता हूँ ।

सुशीला :

1	3	2	+	4	8	0	=	5	11	2
3	2	1		0	4	8		3	6	9
2	1	3		8	0	4		10	1	7

मेरा वर्ग बन गया ।

रवि : और मेरा भी ।

1	2	3	4		0	18	12	6		1	20	15	10
3	4	1	2		18	0	6	12		21	4	7	14
2	1	4	3		6	12	18	0		8	13	22	3
4	3	2	1	+	12	6	0	18	=	16	9	2	19

पिता : पर एक चेतावनी है । रूट अंक का दूसरा अंक आखिरी बेसिक अंक से कम नहीं होने चाहिए ।

मैं : मुझे समझ आ गया । इसके बिना अपूर्ण जादुई वर्ग भी शुद्ध नहीं होगा । दूसरे रूट अंक से छोटा, आखिरी बेसिक अंक लेने पर, 3 आर्डर का ये वर्ग बनता है ।

1	2	3
3	4	5
5	6	7

रवि : अरे मुझे कुछ और बढ़िया दिख रहा है । अगर हम दूसरे रूट अंक को आखिरी बेसिक अंक के बराबर कर देते हैं तो 4 आर्डर का वर्ग ये बनता है ।

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

मैं : पिताजी मैं इसे अब जादुई वर्ग में तबदील कर सकता हूँ । सिर्फ डायगोनल के समान दूरी वाले अंकों की जगह बदलनी होगी ।

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

क्या हम इसी तकनीक को इस्तेमाल करके कैलेंडर के अपूर्ण जादुई वर्ग को पूर्ण जादुई वर्ग बना सकते हैं ?

पिता : करके देखो ।

रवि :

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

ये अपूर्ण जादुई वर्ग है। इस वर्ग में 1,25; 9,17; 4,22 और 10,16 की जगह बदल कर देखते हैं की क्या होता है ।

	25	2	3	22	52
	8	17	16	11	52
	15	10	9	18	52
	4	23	24	1	52
52	52	52	52	52	52

अरे वाह! ये तो जादुई वर्ग बन गया सभी रो, कॉलम और डायगोनल के जोड़ 52 हैं ।

मैं : चलो अब फिर से वर्ग में अंकों के वर्ग (squares) बना कर देखते हैं ।

पिता : मैं खुद ही यही सुझाव देने वाला था। चलो करते हैं ।

रवि : मैंने तो शुरू भी कर दिया ।

	625	4	9	484	1122
	64	289	256	121	730
	225	100	81	324	730
	16	529	576	1	1122
856	930	922	922	930	996

सुशीला : पिताजी ये तो 3 आर्डर के अंकों के वर्ग (squares) से भी ज्यादा जादुई है ।

मैं : हाँ, हम चार अंकों के वर्ग (squares) के जोड़ को दो अलग तरीकों से बता सकते हैं ।

रवि : पिताजी अगर हम अंकों के वर्ग (squares) की जगह अंकों का घन (cube) करें तो ।

मैं : मैं वही कर रहा हूँ ।

	15625	8	27	10648	26308
	512	4 913	4 096	1331	10852
	3375	1000	729	5832	10936
	64	12167	13824	1	26056
15808	19576	18088	18676	17812	21268

सुशीला : पिताजी, ये तो बिलकुल गड़बड़ हो गया ।

पिता : जल्दी नहीं करो। ये कुछ खोजने के लिए अच्छा अवसर है ।

रवि : मुझे ऐसा लगता है की हमें जादुई वर्ग किसी दूसरी तरह से बनाना चाहिए । कोई और तरीका होगा ।

पिता : अच्छा सवाल है । 2 और 24 को बदल कर देखो ।

सुशीला : हाँ, 3 और 238 और 18, 15 और 11

रवि : बदलने के बाद ये वर्ग बनेगा

1	24	23	4
18	9	10	15
11	16	17	8
22	3	2	25

सुशीला : क्या ये अब जादुई वर्ग बन गया

रवि : बनना तो चाहिए। देखते हैं ।

	1	24	23	4	52
	18	9	10	15	52
	11	16	17	8	52
	22	3	2	25	52
52	52	52	52	52	52

देखो बिलकुल जादुई वर्ग है । सभी जोड़ 52 हैं ।

पिता : मेरा एक और सुझाव है । बीच के दो यानि 2 और 3 कॉलम को अदल बदल करके देखो

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

रवि : ऐसा करने से रो और कॉलम के जोड़ तो बराबर ही रहेंगे हमें सिर्फ डायगोनल जोड़ जांच कर देखने होंगे ।

	1	23	24	4	
	18	10	9	15	
	11	17	16	8	
	22	2	3	25	
52					52

हाँ समझ आ गया| डायगोनल जोड़ भी सामान हैं ।

मैं : पिताजी आप कहते हैं ना की हम वर्ग में अंकों का घन(cube) डाल कर देखे । हैं ना ?

पिता : बिलकुल| कोशिश करो ।

मैं : मुझे लगता है की कुछ ज्यादा फर्क नहीं पड़ेगा ।

पिता : तुम ठीक कह रहे हो पर ऐसा करने से एक नई स्थिति बन गई है जो की हमें इस तरफ आगे बढ़ने में बहुत ही सहायक होगी ।

रवि : वो क्या है पिताजी ?

पिता : वर्ग बीच के बिंदु पकड़ कर एक दूसरा वर्ग बना लो ।

रवि : आप ऐसा कह रहे हो ।

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

पिता : हाँ बिलकुल ठीक ।

सुशीला : तो अब आप हमसे क्या करवाना चाहते हो?

मैं : हमें वर्ग की दूसरी तरफ के अंकों को जोड़ना चाहिए ।

पिता : गहरी सोच है | बढ़िया !

मैं : मैं इनके अंकों के वर्ग(squares) कर के देखता हूँ |

रवि : मैं इनके अंकों का घन(cube) कर के देखता हूँ |

मैं : चलो जल्दी जल्दी करो बहुत मज़ा आ रहा है |

सुशीला : $18^2 + 23^2 + 3^2 + 8^2 = 926$

$$24^2 + 15^2 + 11^2 + 2^2 = 926$$

रवि : $18^3 + 23^3 + 3^3 + 8^3 = 18538$

$$24^3 + 15^3 + 11^3 + 2^3 = 18538$$

पिता : देखा है ना ये बिल्कुल जादुई खज़ाना |

चलो अब देखते हैं की इस तरह का पैटर्न हमें कैलेंडर से बने हुए वर्ग में भी मिल सकता है क्या?

सुशीला : पिताजी मैं इस वर्ग को जादुई वर्ग में बदल सकती हूँ |

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1,5,9 को हम बीच के कॉलम में डाल देते हैं और 3,5,7 को बीच की रो में डाल देते हैं। 2,5,8 और 4,5,6 को डायगोनल खानों में उलटी दिशा में डाल देते हैं

	1	
3	5	7
	9	

8	1	4
3	5	7
6	9	2

अब क्या मैं इस तरीके से 3 आर्डर के अपूर्ण जादुई वर्ग को पूर्ण जादुई वर्ग में बदल सकती हूँ ? चलो मैं पहले करके देखती हूँ |

1	2	3
8	9	10
15	16	17

अब 1,9,17 बीच के कलम में जाने चाहियें और 3,9,15 बीच की रो में |

2,9,16 और 8,9,10 डायगोनल में उलटी दिशा से जायेंगे |

ऐसा करने पर ये वर्ग मिलता है

	6	1	10	27
	3	9	15	27
	8	17	2	27
27	27	27	27	27

वाह! देखो मुझे अब कैलेंडर की गणित समझ आ रही है ।

आठवां अध्याय

सुशीला : पिताजी कैलेंडर में कोई अंक सोचने वाला खेल नहीं है?

मैं : बिलकुल है। मई के महीने को लेते हैं ।

पहले कॉलम से कोई भी संख्या ले कर अपने मन में याद रखो । अब तीसरे कॉलम से भी कोई संख्या सोच कर याद रख लो । अब दोनों संख्याओं को मन में जोड़ लो पर मुझे जोड़ मत बताओ। सिर्फ एक शर्त है की जोड़ 31 से कम होना चाहिए क्योंकि हमारे कैलेंडर में 31 तक ही अंक हैं ।

सुशीला : कर लिया ।

मैं : तुम्हारी जोड़ी हुई संख्या चौथे कॉलम में है ?

सुशीला : वाह! ये तो बहुत बढ़िया है । मैंने पहले कॉलम से 8 लिया और तीसरे कॉलम से 17। 8 और 17 को जोड़ कर 25 आया जो की चौथे कॉलम में है । आपने कैसे पता लगाया पिताजी ?

पिताजी मैंने एक संख्या दूसरे कॉलम से ली और दूसरी संख्या चौथे कॉलम से ली। और मैंने जोड़ निकाल लिया है ।

पिता : तुम्हारी संख्या छठे कॉलम में है ।

रवि : बलकुल सही। मैंने दूसरे कॉलम से 16 लिया चौथे से 4 । इनका जोड़ 20 होता है जो छठे कॉलम में है।

सुशीला : क्या हम दोनों संख्या एक ही कॉलम से नहीं चुन सकते ?

मैं : बिलकुल । चलो कोई भी दो संख्या चौथे कॉलम से चुन कर जोड़ लो ।

सुशीला : मैंने जोड़ लिया

मैं : तुम्हारी जोड़ी हुई संख्या पहले कॉलम में है

सुशीला : सही । मैंने 11 और 18 चुने । इनका जोड़ 29 पहले कॉलम में है । हम्म ! और $4 + 4 = 8$ । और 8 पहले कॉलम में है ।

मैं : पर एक शंका है । मैंने पहले कॉलम से 22 लिया और तीसरे कॉलम से 10 । अब इनका जोड़ 32 हुआ जो कि कैलेंडर में है ही नहीं ।

पिता : ऐसे मैं हम मान सकते हैं की हमारे कैलेंडर में संख्या 31 पर नहीं खत्म होती बल्कि आगे चलती रहती हैं।

मैं : तो फिर मेरा अंक चौथे कॉलम में होगा। मैं बताऊँ इसका जादू। दोनों कॉलम के सबसे ऊपर वाले अंकों को जोड़ कर जो अंक आता है वह जुड़े हुए अंकों के कॉलम के जोड़ का कॉलम बताता है ।

पिता : बिलकुल ठीक ।

मैं : पर एक गड़बड़ है | मैंने कॉलम 4 से 11 और कॉलम 6 से 20 | अब $20 + 11 = 31$ | कॉलम 4 और कॉलम 6 के सबसे ऊपर के अंक 4 और 6 हैं | $4 + 6 = 10$ | पर 10 तो किसी भी कॉलम का सबसे ऊपर का अंक नहीं है |

रवि : पर 31 तो कॉलम 3 में है |

सुशीला : 10 भी कॉलम 3 में है |

मैं : मैं 10 के कॉलम को कैलेंडर में से ढूँढ सकता हूँ | पर क्या मैं कॉलम 10 को ढूँढे बिना कॉलम 3 को निकाल सकता हूँ |

पिता : हर कॉलम के अंक का उसके सबसे ऊपर वाले अंक से क्या सम्बन्ध है? क्या तुम ये निकल सकते हो?

रवि : हर कॉलम के अंक एक श्रेणी में हैं | हर अंक पिछले वाले अंक से 7 ज्यादा है |

सुशीला : और आखिरी कॉलम के अंक 7 के गुणांक हैं |

मैं : आहा ! यदि मैं सात के विभिन्न गुणांक में 1 जोड़ता हूँ तो पहले कॉलम के अंक आ जाते हैं |

पिता : क्या हम ये भी कह सकते हैं कि कॉलम के किसी भी अंक को 7 से भाग देने पर एक ही शेषफल मिलता है | और वो शेषफल उस कॉलम का सबसे ऊपर वाला अंक है |

सुशीला : पर 4 को 7 से कैसे भाग दें |

रवि : मुझे पता है | चार में से 7, 0 बार जाता है और 4 शेष बचता है |

मैं : बिलकुल सही |

रवि : तो इस कॉलम के खेल के मुख्य अंक 1,2,3,4 ,5,6,7 हैं | ठीक ना ?

सुशीला : 7 तो 7 को भाग देता है और शेषफल 0 है |

पिता : चलो 0 से लेकर आगे तक अंक 7 कॉलम में लिख कर देखते हैं |

सुशीला :

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27

इत्यादि |

कैलेंडर का आखिरी कॉलम यहाँ पर पहला कॉलम है और बाकी कॉलम एक आगे बढ़ गए हैं |

पिता : तो हम पहले कॉलम के अंकों को शेषफल 0 अंक यानि R0 अंक कह सकते हैं | इसी तरह दूसरे कॉलम के अंकों के शेषफल 1 यानि R1 कह सकते हैं | और इसी तरह बाकी कॉलम भी |

अब यदि हम 0 से आगे अंकों को 6 कॉलम में लिखें तो क्या होगा |

सुशीला : चलो मैं लिख कर देखती हूँ |

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23

इत्यादि |

रवि : हमें शेषफल 0 अंक मिलेंगे, शेषफल 1 अंक मिलेंगे और इसी तरह शेषफल 5 तक अंक मिलेंगे |

पिता : तो हमें किस अंक से भाग देना पड़ेगा |

सुशीला : 6

पिता : अगर हम अंकों को 8 से भाग देते हैं तो कितने प्रकार के शेषफल अंक मिलेंगे |

रवि : 8 - R0, R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7

पिता : "समान शेषफल छोड़ने वाले अंक" इस सिद्धांत को गौस ने "कोन्ग्युएन्स का सिद्धांत"(congruence) कहा।
उसने इसके लिए एक अच्छा चिन्ह भी निकला। $9 = 23 \pmod{7}$ । इसे $9 = 23 \text{ modulo } 7$, ऐसे पढ़ते हैं।

मैं : इसका मतलब है कि 9 और 23, 7 से भाग देने पर सामान शेषफल छोड़ते हैं।

पिता : modulo का मतलब है मापना। जब 9 और 23 को 7 की इकाई से मापते हैं तो बचे हुए अंक समान होते हैं।

रवि : 9 और 23 में 14 का अंतर है। और $7 \times 2 = 14$ । तो क्या हम कह सकते हैं कि 9 और 23 का अंतर 7 का गुणांक है।

पिता : बिल्कुल कह सकते हैं। कोन्ग्युएन्स का सिद्धांत बराबरी के सिद्धांत की तरह ही है।

मैं : इसका क्या मतलब है ?

पिता : बराबरी के सिद्धांत को लेते हैं।

अगर $a = b$

तो $a + c = b + c$ होगा ?

अगर $c = d$,

तो क्या $a + c = b + d$ होगा ?

क्या हम यही चीज़ कोन्ग्युएन्स सिद्धांत के साथ कर सकते हैं।

मैं : ओह! मुझे समझ आ गया। कॉलम 2 से $9 = 23 \pmod{7}$ । ठीक। कॉलम 3 से $10 = 17 \pmod{7}$ । तो $9 + 10 = 23 + 17 \pmod{7}$ जो की कॉलम 5 है। और यही है हमारे खेल का सुराग।

रवि : क्या हम ये खेल कॉलम घटा कर भी कर सकते हैं।

पिता : बिल्कुल। $5 - 3$ को कैसे करोगे।

रवि : 5 में से 3 घटाओ या य 5 में -3 जोड़ो।

मैं : घटाना का मतलब उल्टा जोड़ना ही तो है।

पिता : हाँ इस तरह हम घटाने वाला काम जोड़ कर भी कर सकते हैं। इसके लिए घटाने वाले नियम की ज़रूरत नहीं है।

सुशीला : क्या हम इसी तरह अंकों को गुणा करने का खेल नहीं खेल सकते? चलो कॉलम 2 से 9 और कॉलम 3 से 3 लेते हैं। $9 \times 3 = 27$ और $2 \times 3 = 6$, यानि 27 कॉलम 6 में होना चाहिए। बिल्कुल सही।

पिता : अगर $a = b$

तो $ac = bc$ होगा ?

अगर $c = d$,

तो क्या $ac = bd$ नहीं होगा ?

क्या हम यही कोन्ग्युएन्स सिद्धांत के लिए नहीं कर सकते?

मैं : बिल्कुल कर सकते हैं। जैसे

$$8 = 15 \pmod{7} \text{ कॉलम 1 से}$$

$$\text{तो } 8 \times 2 = 15 \times 2 \pmod{7}$$

$$\text{और } 2 = 9 \pmod{7} \text{ कॉलम 2 से}$$

$$\text{तो } 8 \times 2 = 15 \times 9 \pmod{7}$$

$$\text{या } 16 = 135 \pmod{7} \text{ हैं ना ?}$$

रवि : $135 - 16$, 7 का गुणांक होना चाहिये। $135 - 16 + 119$

$119 = 7 \times 17$ बिल्कुल सही

मैं : कोन्गुएन्स सिद्धांत वर्ग आदि के लिए भी होते हैं।

जैसे $a^2 = b^2$, $a^3 = b^3$ आदि

इसी तरह $a^n = b^n$, है ना ?

पिता : बिल्कुल।

मैं : गुणा का खेल हो गया तो भाग का भी हो सकता है। भाग मतलब भिन्न से गुना करना।

पिता : अगर $a = b$

तो $a/c = b/c$ होगा

अगर $c = d$,

तो $a/c = b/d$ भी होगा। पर $c = d \neq 0$

हम इसे ऐसे भी लिख सकते हैं।

$\frac{1}{c} \times a = \frac{1}{d} \times b$ और यदि $\frac{1}{c} = \frac{1}{d}$ तो $\frac{1}{c} \times a = \frac{1}{d} \times b$

पिता : कोन्गुएन्स के सिद्धांत में हमें थोड़ी सावधानी बरतनी पड़ेगी क्योंकि भाग देना सार्वभौमिक नहीं है। इस बात को हम और कभी देखेंगे।

नवां अध्याय

मैं : पिताजी हम अक्सर कैलेंडर को दिन और तारीख देखने के लिए इस्तेमाल करते हैं। क्या हम कैलेंडर को शेषफल के सिद्धांत से और आसान नहीं बना सकते ?

पिता : बिल्कुल, हम कैलेंडर को इतना छोटा बना सकते हैं की वो एक पोस्टकार्ड में समा जायेगा।

रवि : अरे वाह! उसमे तो बड़ा मज़ा आएगा। ऐसा कैलेंडर बनाने में हमारी मदद करिए।

पिता : इस कैलेंडर को सबसे बड़े महीने की तारीख दिखनी चाहिए।

सुशीला : आपका मतलब है 1-31 तक की तारीख?

पिता : हाँ। और क्या तुम्हे याद है की हर महीने में कितने दिन होते हैं।

रवि : जनवरी फरवरी मार्च अप्रैल मई जून जुलाई अगस्त सितम्बर अक्टूबर नवम्बर दिसंबर

31 28/29 31 30 31 30 31 31 30 31 30 31

पिता : अब हमें महीने की पहली तारीख को क्या दिन है वो निश्चित करना होगा।

रवि : ठीक है। मैं शेषफल से महीने का पहला दिन निकालता हूँ।

सुशीला : ठीक है। तो जनवरी 88 का कैलेंडर अपने पास रखो और बाकी महीनों का कैलेंडर मुझे दे दो। उसके बाद मैं जांच लूंगी।

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
31					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

रवि : जनवरी 1 को शुक्रवार है। फरवरी 1, 31 दिन बाद है, 31 R3 है, $1 + 3 = 4$, 4 को सोमवार है। इसलिए 1 फरवरी को सोमवार है।

सुशीला : ठीक।

रवि : 1 मार्च 29 दिन बाद है, 29 R1 है, $4 + 1 = 5$, 5 को मंगलवार है। इसलिए मार्च 1 को मंगलवार है।

सुशीला : ठीक।

रवि : 1 अप्रैल 31 दिन बाद है, 31 R3 है, $5 + 3 = 8$, 8 और 1 बराबर है, और 1 को शुक्रवार है। इसलिए 1 अप्रैल को शुक्रवार है।

सुशीला : ठीक।

रवि : चलो मैं बाकी के निकाल कर बताती हूँ।

1 मई को रविवार

1 जून को बुधवार

1 जुलाई को शुक्रवार

1 अगस्त को सोमवार

1 सितम्बर को गुरुवार

1 अक्टूबर को शनिवार

1 नवम्बर को मंगलवार

1 दिसंबर को गुरुवार

सुशीला : सब बिलकुल ठीक।

मैं : जनवरी, अप्रैल और जुलाई शुक्रवार को शुरू होते हैं। अक्टूबर शनिवार को, मई रविवार को, फरवरी और अगस्त सोमवार को, मार्च और नवम्बर मंगलवार को, जून बुधवार को,

सितम्बर और दिसंबर गुरुवार को।

पिता : ये हम ऐसे लिख सकते हैं।

1, 4, 7 शुक्रवार

10 शनिवार

5 रविवार

2, 8 सोमवार

3, 11 मंगलवार

6 बुधवार

9, 12 गुरुवार

अब तुमने बाकी महीनों के दिन जनवरी के महीने के हिसाब से निकाले हैं तो जनवरी का कैलेंडर अपने पास रख सकते हैं। इस प्रकार हम पूरे साल का कैलेंडर एक संक्षिप्त रूप में ऐसे लिख सकते हैं।

सुशीला : चलो मैं एक तारीख चुनती हूँ 21/9/88। हम इस संक्षिप्त कैलेंडर से इस तारीख का दिन कैसे निकालेंगे।

मैं : नवें महीने के सामने 21 तारीख के नीचे 6 है और 6 बुधवार है।

रवि : अब मुझे तारीख दो और मैं दिन बताता हूँ।

सुशीला : 24 |11|88

रवि : 11वें महीने के सामने और 24 के नीचे 7 है और 7 को गुरुवार है।

सुशीला : ठीक।

मैं : क्या हम इस कैलेंडर को और छोटा नहीं कर सकते ? मुझे एक तरीका नज़र आ रहा है। हम हर महीने के शेषफल अंक निकालते हैं जिसको जनवरी की पहली तारीख में जोड़ने से उस महीने की पहली तारीख का दिन आ जायेगा।

1,4 ,7 के लिए 0 या 7

10 के लिये 1

5 के लिए 2

2,8 के लिए 3

3,11 के लिए 4

6 के लिए 5

9,12 के लिए 6

रवि : इससे क्या फायदा हुआ ?

मैं : पहले की तरह हम जनवरी का कैलेंडर लेकर उसके नीचे शेषफल वाले अंक ऐसे लिख देंगे।

	रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
	31					1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30
महीने							
1,4,7	3	4	5	6	7	1	2
10	4	5	6	7	1	2	3
5	5	6	7	1	2	3	4
2,8	6	7	1	2	3	4	5
3,11	7	1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5	6	7
9,12	2	3	4	5	6	7	1

रवि : ये संक्षिप्त कैलेंडर मुझे दो और कोई तारीख दो मैं दिन बताता हूँ।

मैं : 12|3|88

रवि : $12 = R5$

3 के सामने 4 है

$$5 + 4 = 9$$

और $9 = R2$

2 को शनिवार है। तो 12|3|88 को शनिवार है। ठीक ?

मैं : अब मुझे बिल्कुल समझ आ गया।

सुशीला : अब मेरी बारी।

रवि : 19|8|88 का दिन बताओ।

सुशीला : $19 = R5$

8 के सामने 3

$$5 + 3 = 8$$

$$8 = R1$$

1 को शुक्रवार है। तो 19|8|88 को शुक्रवार है।

मैं : मुझे लगता है की हम कैलेंडर को और छोटा कर सकते हैं। हमें सारी तारीख लिखने की ज़रूरत ही नहीं है। हमें सिर्फ हर वार के सबसे ऊपर वाले अंक चाहिए। बाकी सभी तारीख शेषफल के अनुसार हम निकाल सकते हैं।

जैसे $8 = R1$ और $11 = R4$

रवि : मुझे तुम्हारी बात समझ आ गई। ये तो इतना छोटा है की इसे तो हम एक साधारण बुकमार्क की तरह ही रख सकते हैं।

रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
3	4	5	6	7 या 0	1	2
2	3	6	9	1	10	5
8	11		12	4		
				7		

सुशीला : अरे वाह। अब हर साल हम ये संक्षिप्त कैलेन्डर बना कर अपने मित्रों को उपहार में दे सकते हैं।

दसवां अध्याय

पिता : अभी तक हमने देखा की 0,1,2,3,4,5,6, शेषफल अंकों का समूह(set) दिन को निकालने में, कॉलम का जोड़ घटा और गुणा करने में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। तो चलो इसमें और ज्यादा गहरा जाते हैं। सबसे पहले कॉलम के जोड़ की टेबल बनाते हैं।

रवि : मैं बनाती हूँ।

सुशीला : तुम्हें कैलेंडर नहीं चाहिए क्या ?

रवि : नहीं बिलकुल नहीं। ये है कॉलम के जोड़ के टेबल।

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

सुशीला : इस टेबल से हमें जोड़ के नये सिद्धांत मिलते हैं।

रवि : अगर 3 और 5 साधारण अंक हैं तो उनका जोड़ 8 होता है। परन्तु यदि हम 3 और 5 शेषफल अंक हैं, यानि वो अंक जिनको सात से भाग देने के बाद जो शेषफल बचे, तब ये जोड़ सही नहीं है।

सुशीला : हाँ शेषफल 3 अंक + शेषफल 5 अंक = शेषफल 1 अंक।

रवि : क्या कोई और उदाहरण दे सकती हो ?

सुशीला : मुझे 3 को 7 के गुणांक में जोड़ने से जो अंक मिलेंगे वो शेषफल 3 अंक होंगे। उसी तरह 5 को 7 के गुणांक में जोड़ने से शेषफल 5 अंक मिलेंगे।

14 + 3 = 17 | 17 शेषफल 3 अंक हुआ | और उसी तरह 21 + 5 = 26 शेषफल 5 अंक हुआ |

अब 17 + 26 = 43, 43/7 = 6 शेषफल 1, तो इसलिए 3 + 5 शेषफल 1 अंक है |

मैं : 0 भी 7 का गुणांक है | तो हम 0 में 3 जोड़ते हैं तो 3 मिलेगा जो की शेषफल 3 अंक है | उसी तरह 0 में 5 जोड़ने पर 5 मिलेगा जो कि शेषफल 5 अंक है | 3 + 5 = 8 तो 8 शेषफल 1 अंक होना चाहिये | 8/7 = 1 शेषफल 1

सुशीला : ओह! अब मुझे समझ में आया | धन्यवाद |

पिता : इसमें एक और रोचक बात है | 3 में क्या अंक जोड़ने पर 0 मिलेगा |

रवि : ऐसा कोई भी अंक (whole number) नहीं है |

पिता : अगर पूर्णांक (integer) में देखें तो |

रवि : मुझे पता है, -3

पिता : नहीं शेषफल अंकों में ?

रवि : अरे जो हमने शेषफल के कॉलम के जोड़ की टेबल बनायी थी उसमें देख कर पता चलता है की 3 में 4 जोड़ने पर 0 मिलता है |

मैं : ओह! तो शेषफल अंकों के विपरीत अंक भी उन्ही शेषफल अंकों के समूह में है |

एक और बात मजेदार है | 0 को छोड़ कर किसी और अंक का विपरीत whole नंबर में नहीं है | इसीलिए पूर्णांक (Integer) खोज करो जो कि नेगेटिव भी हो सकते हैं | पर शेषफल अंकों (≥ 2 , दो या दो से ज्यादा से भाग देने पर) के समूह में विपरीत अंक भी उसी समूह में ही मिलते हैं | चलो 7 के शेषफल समूह (set) में अंक और उसके विपरीत अंक लिखते हैं |

शेषफल	0	1	2	3	4	5	6
विपरीत	0	6	5	4	3	2	1

हाँ 0 के सिवाय सभी अंकों के विपरीत अंक दूसरे हैं |

पिता : चलो अब इन सभी अंकों के वर्गों (squares) 7 के शेषफल अंकों में लिखते हैं |

रवि : $1^2 = 1 \pmod{7}$

$6^2 = 1 \pmod{7}$

$2^2 = 4 \pmod{7}$

$5^2 = 4 \pmod{7}$

$3^2 = 2 \pmod{7}$

$4^2 = 2 \pmod{7}$

हैं ना मजेदार विपरीत अंकों के वर्गों (square) के भी समान शेषफल अंक होते हैं।

मैं : हाँ पर अंकों का वर्ग (square) करने पर सिर्फ 1,2 और 4 ही शेषफल अंक आये।

पिता : 1,2 और 4 को quadratic residue कहते हैं। 3,5 और 6 को quadratic non-residue कहते हैं। महान गणितज्ञ गौस इस बात से बहुत प्रभावित था।

मैं : ये बात तो 7 के शेषफल अंकों की है। पर क्या किसी और अंक का शेषफल लें तो उसमें भी quadratic residue और quadratic non-residue होते हैं ?

पिता : हाँ बिल्कुल। चलो अब हम शेषफल अंकों में ही ऊपर वाली क्रिया घटाने में करते हैं। जैसे 2-5 का उत्तर पूर्ण संख्या (whole number) में क्या है।

रवि : पूर्ण संख्या (whole number) में 2-5 का कोई उत्तर नहीं है। उसके लिए पूर्णांक(integer) में जाना पड़ेगा।

पिता : ठीक अब 2-5 का 7 के शेषफल अंकों में क्या उत्तर है।

मैं : पांच में क्या जोड़ने पर 2 आएगा। पहले वाली जोड़ की टेबल देख कर पता चलता है

+	5
4	2

तो शेषफल अंकों में किसी भी अंक को किसी भी अंक से घटाने में जो शेषफल अंक मिलता है वो शेषफल अंकों के समूह(set) का ही होता है।

पिता : इन शेषफल अंकों में एक और विचित्र बात है।

जैसे 2,4 और 6 साधारण अंक है।

अब $6-4 = 2$ और $4-2 = 2$ ।

इससे ये कह सकते हैं की $6 > 4 > 2$ ।

पर ये बात हम शेषफल अंकों में देखे तो कुछ और ही होता है। और इसका आभास इस ऊपर लिखे सूत्र से भी होता है की शेषफल अंकों के किसी भी अंक को किसी भी अंक से घटने पर उत्तर शेषफल अंकों के समूह से ही होता है। चलो 7 के शेषफल अंकों में ये करके देखते हैं।

रवि : हाँ देखो शेषफल अंक में गणित करें तो $6-4 = 2$ और $6-2 = 4$ ।

मैं : पर $4-6 = 5$ और $2-6 = 3$ ।

और ये बहुत ही अजीब है। इससे ये निकलता है की $6 > 4$ और $4 > 6$ । इसी तरह $6 > 2$ और $2 > 6$ । ये तो बहुत ही पेचीदा है।

पिता : हाँ शेषफल अंकों में हमें ये मानना पड़ेगा की कोई भी अंक किसी से बड़ा या छोटा नहीं होता। गणित की भाषा में कहते हैं की शेषफल अंकों का कोई आर्डर नहीं होता।

चलो अब शेषफल अंकों को गुणा करके देखते हैं।

रवि : चलो मैं गुणा की टेबल बनती हूँ।

मैं : क्या तुम्हे कैलेंडर चाहिए।

रवि : मैं बिना कैलेंडर के ही ये टेबल बना सकती हूँ। पर जल्दी से टेबल बनाने के लिए मुझे कैलेंडर दे ही दो।

X	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

टेबल तैयार हैं।

सुशीला : मैं जांचती हूँ। टेबल के अनुसार शेषफल 6 अंक को शेषफल 4 अंक से गुणा करने पर शेषफल 3 अंक आता है।

शेषफल 6 = अंक 13

शेषफल 4 = अंक 11।

$13 \times 11 = 143$

$143/7 = 20$ शेषफल 3।

इसलिए 3 सही उत्तर है।

पिता : पूर्ण संख्या (whole number) के समूह (set) में ऐसा कोई भी अंक नहीं है की जिसे 3 से गुणा करने पर 5 आ जाए।

यानि $3x ? = 5$ का कोई पूर्ण संख्या (whole number) में उत्तर नहीं है। पर शेषफल अंकों में इसका उत्तर है। चलो 7 के शेषफल अंकों में इसके उत्तर देखते हैं।

रवि : टेबल के अनुसार उत्तर 4 है। $3 \times 4 = 12$

मैं : ओह! अब मुझे समझ आया। यहाँ पर भिन्न (fraction) को लाने की ज़रूरत नहीं है। जैसे पहले पूर्ण संख्या (whole number) को हम एक भिन्न (fraction) माने जिसका भाजक (denominator) 1 हो।

टेबल की एक खास बात है की 0 को छोड़कर किसी भी रो में सारे शेषफल अंक हैं। इसके कारन ये भी कह सकते हैं की किसी भी शेषफल अंक को किसी से भी भाग दे दें तो उत्तर आएगा और वो शेषफल अंकों में से ही होगा।

पिता : तुम्हें परिमेय संख्या (rational number) मालूम है ना। ये नंबर किसी भी पूर्णांक (integer) को किसी भी पूर्णांक (integer) (0 के आलावा) से भाग देने पर बनते हैं। इन परिमेय संख्या (rational number) में कोई भी पहला और कोई भी आखिरी नहीं हो सकता। क्योंकि परिमेय संख्या (rational number) असंख्यात हैं। और मजेदार बात ये है की ये संख्यात शेषफल अंक असंख्यात अंकों के तरह बर्ताव करते हैं। और इस तरह से के उनपर हम कोई भी प्रक्रिया कर सकते हैं जैसे

रवि : जोड़ना, घटाना, गुना और भाग देना वो भी बिना शेषफल बचे।

मैं : ये बहुत ही बेजोड़ चीज़ है । इसे क्या नाम दिया गया है जिसमे हम एक set में चारों प्रक्रियाएं कर सकते हैं।

पिता : गणित में इसको दर्शाने के लिए कोई पूर्ण property नहीं है। फिर भी गणित की भाषा में गणितज्ञ इसे set का field कहते हैं।

मैं : पिताजी मेरा सवाल है। क्या होगा यदि हम भाग देने वाले अंक को छोटा कर दे, जैसे की 7 की जगह कोई छोटा अंक ले लें। तो ये समूह (set) छोटा हो जायेगा ?

पिता : हाँ बिलकुल। और छोटा होते होते न्यूनतम हो जायेगा। क्या है वो ?

मैं : अगर 2 से भाग दे तो वो set 0 और 1 का होगा।

सुशीला : यदि हम अंकों को 6 के कॉलम में लिखें तो क्या होगा।

पिता : करके देखो। और 0 से शुरू करो।

सुशीला : 0 से 5 तक सबसे पहली रो में आयेंगे।

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35

और इसी तरह आगे.....

पिता : बढ़िया। और इसके शेषफल अंक क्या होंगे ?

सुशीला : 0,1,2,3,4 और 5

पिता : देखो अब क्या हुआ है। अगर कोई भी अंक हो तो क्या तुम बता सकते हो की वो किस कॉलम में होगा ?

रवि : दीजिये कोई भी अंक।

पिता : 113

रवि : $113/6 = 18$ शेषफल 5 (modulo 6)

मैं : 113 आखिरी कॉलम में होगा जिसके सबसे ऊपर 5 अंक होगा।

पिता : तो इसका मतलब है की सारे ही अंक 6 में से किसी भी एक कॉलम में होंगे ?

रवि : बिलकुल।

पिता : क्या कोई भी अंक एक से ज्यादा कॉलम में आ सकता है?

रवि : बिल्कुल नहीं।

मैं : इस समूह(set) में 6 शेषफल अंक हैं। और कोई भी अंक दो बार नहीं है।

पिता : बिल्कुल ठीक। गणित की भाषा में इस प्रक्रिया को partitioning कहते हैं और ये जो समूह (set) बनते हैं इन्हें disjoint कहते हैं।

मैं : मुझे समझ आ गया। अंकों को कॉलम में लिखने से कुछ बढ़िया बातें निकल कर आती हैं।

(1) modulo निश्चित हो जाता है और वो जितने कॉलम हैं उतना है।

(2) संख्यात अंकों का शेषफल समूह (set) बन जाता है।

(3) पूर्ण संख्या को हम disjoint set में विभाजन कर पाते हैं।

रवि : बस यही नहीं। हम कॉलम के जोड़, घटा और गुणा का खेल भी खेल सकते हैं।

पिता : 7 के शेषफल अंकों के set में , जिसे modulo 7 का set या 7 की गणित कहते, हमने देखा की हम जोड़, घटा, गुणा और बिना शेषफल का भाग कर सकते हैं। या गणित की भाषा में, 7 के शेषफल अंकों का set field है। अब हम देखेंगे की यही बात बाकी सब modulo अंकों के लिए भी लागू होती है या नहीं। चलो 6 का modulo करके देखते हैं।

रवि : शेषफल अंक हैं 0,1,2,3,4 ,5। अब हमें जोड़ और गुणा की टेबल बनानी चाहियें हैं ना ?

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

रवि : ये तो बिल्कुल modulo 7 के जोड़ जैसी है।

में : तो हम जोड़ और घटा कर सकते हैं और उत्तर modulo 6 शेषफल समूह (set) से ही होगा पहले की तरह।

सुशीला : अब मैं गुणा की टेबल बनती हूँ, 6 की गणित के लिए, 6-arithmetic।

x	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

रवि : अरे भगवान्! ये टेबल तो 7 की गुणा वाली टेबल से अलग है।

पिता : तुमने बिल्कुल ठीक कहा। पर क्या तुम दोनों में कुछ फर्क बता सकती हो।

में : $3 \times 2 = 0$ और $3 \times 4 = 0$, ये बात हमने 7 modulo टेबल में नहीं देखी थी। असल में ये बात किसी और समूह(set) में नहीं होती चाहे वे पूर्ण संख्या हों, या पूर्णांक हो, भिन्न संख्या (fractional number) हो, या फिर परिमेय संख्या (rational number) ही क्यों ना हों। इन सभी समूह (set) में कभी भी शून्य के आलावा किसी भी दो अंकों को गुणा करने पर शून्य नहीं आ सकता। दूसरे शब्दों में कहें तो यहाँ पर 0 को किसी अंक से भाग देने पर बिना शून्य वाला उत्तर आ जाता है।

पिता : हाँ। अब ये modulo 6 की गुणा वाली टेबल देखो। क्या ये बता सकते हो कि $2 \times ? = 4$

रवि : अगर हम 2 की रो या कॉलम देखें तो उसमें 4 दो जगह आता है। $2 \times 2 = 4$ और $2 \times 5 = 4$ । तो इसका $2 \times ? = 4$ के दो उत्तर हैं 2 और 5। ये बहुत ही अचम्भे वाली बात है क्योंकि साधारण अंकों (पूर्णांक, पूर्ण संख्या, परिमेय संख्या) में संभव ही नहीं है।

पिता : क्या बता सकते हो कि $3/4 = ?$ या दूसरे शब्दों में $4 \times ? = 3$ ।

में : इसी टेबल में देखें तो 4 के रो या कॉलम में कहीं भी 3 नहीं है।

$$4 \times 0 = 0, 4 \times 1 = 4, 4 \times 2 = 2,$$

$$4 \times 3 = 0, 4 \times 4 = 4, 4 \times 5 = 2,$$

इसका मतलब है की 4 को किसी भी अंक से गुणा करने पर 4 नहीं आ सकता। यानि इस प्रश्न का उत्तर नहीं है।

रवि : तो हम modulo 6 के शेषफल समूह (set) में भाग भी नहीं कर सकते।

पिता : तुम काफी तेज़ हो। तो हम modulo 6 के शेषफल अंकों में जोड़, घटा और गुणा तो कर सकते हैं पर भाग नहीं कर सकते।

मैं : तो इस समूह(set) को field नहीं है।

पिता : बिलकुल ठीक। ऐसे समूह(set) को गणित की भाषा में ring कहते हैं

मैं : अब सवाल ये है की ये कैसे पता चलायें की किस अंक के modulo शेषफल समूह (set) ring होगा या field।

पिता : बहुत अच्छा सवाल है।

सुशीला : हम उस अंक की जोड़ और गुणा की टेबल बना कर पता चला सकते हैं।

रवि : मुझे लगता है की गुणा की टेबल ही पर्याप्त है।

मैं : हाँ कर सकते हैं। पर ये काम लम्बा और पेचीदा है। कोई सरल उत्तर होना चाहिए।

रवि : मुझे लगता है के मेरे पास उत्तर है। जब हम विशाल (odd) अंक का modulo करते हैं तो वो field है (जैसे 7) पर सम अंक का modulo ring होगा।

पिता : इतना आसान नहीं है। चलो 4, 5 और 9 की जोड़ और गुणा की modulo टेबल बना कर देखते हैं।

मैं : हमें जोड़ और गुणा दोनों ती टेबल बनाने की क्या ज़रूरत है। सिर्फ गुणा की टेबल बनाने से उत्तर मिल जायेगा।

पिता : करके देखो।

रवि : सबसे पहले मैं modulo 9 की टेबल बनाना हूँ।

सुशीला : तब तक मैं modulo 4 और modulo 5 की टेबल बनाती हूँ।

रवि :

X9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

X4	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

X5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

रवि : modulo 9 की टेबल लगभग modulo 6 की जैसी है। तो जो मैंने सम और विषम का तरीका सोचा था वो सही नहीं है।

सुशीला : पर modulo 5 की टेबल modulo 7 के जैसी है।

मैं : modulo 4 और modulo 6 और modulo 9 की गुणा की टेबल का एक जैसा पैटर्न है। जबकि modulo 5 और modulo 7 की गुणा की टेबल का पैटर्न एक जैसा है।

अरे वाह। मुझे मिल गया। 4, 6 और 9 सम्मिश्र अंक (composite numbers) है। यानि वो अंक जिनको किसी भी अंक से पूरा भाग कर सकते है। (1 या उसी अंक के अलावा) जबकि 5, 7 अभाज्य अंक (prime number) है। इन अंकों को किसी भी अंक से पूरा भाग नहीं दे सकते। या गणित की भाषा में जोड़ और गुणा के लिए अभाज्य अंकों

का modulo शेषफल अंकों का समूह (set), field है और सम्मिश्र अंकों के modulo शेषफल अंकों का समूह (set), ring है।

पिता : वाह वाह। ये बहुत ही बड़ी खोज है। एक और मजेदार बात है। सारे अंकों को एक लाइन में लिख दो। अगली लाइन में modulo 3 के शेषफल अंक लिख दो।

पिता :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
				0	1	2			

पिता : अब इन दोनों पंक्तियों को तीर से जोड़ दो ताकि हर अंक 3 से भाग देने पर शेषफल की तरफ हो।

0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

अरे वाह ये तो बहुत रोचक है।

पिता : गणित की भाषा में पहली लाइन के अंक यानि पूर्ण संख्या को domain कह सकते हैं और दूसरी लाइन के शेषफल अंकों को codomain कह सकते हैं। और तीरों को mapping या उन दोनों के सम्बन्ध को दर्शाता है।

मैं : 0, 3, 6, 9 ... सभी 0 पर map हो जाते हैं।

1, 4, 7, 10 ... सभी 1 पर map हो जाते हैं।

2, 5, 8, 11... सभी 2 पर map हो जाते हैं।

पिता : ये किस तरह का सम्बन्ध या mapping है

मैं : एक से ज्यादा अंकों का एक ही अंक से सम्बन्ध है। सभी शेषफल अंकों से किसी ना किसी का सम्बन्ध है। इसे many-to-one mapping कहते हैं। ये साधारण सम्बन्ध नहीं है। इसको गणित में प्रक्राय (function) कहते हैं। ये आपने पिछले साल बताया था। है ना ?

पिता : बढ़िया! अब हम 0, 1, 2 को सभी पूर्ण संख्या की image समझ सकते हैं। 5 और 10 की क्या image है।

रवि : 5 की image 2 है, और 10 की 1 है।

रवि : और $5 + 10$ की image क्या है।

रवि : 0।

सुशीला : हाँ और $2 + 1$ भी 0 है।

मैं : मतलब अंकों की image का जोड़ और अंकों के जोड़ की image सामान होती है।

रवि : क्या यही बात गुणा के लिए भी लागू होती है। चलो करके देखते हैं।

5 और 10 की image 2 और 1 हैं। और image को गुणा करें तो $2 \times 1 = 2$

अब $5 \times 10 = 50$, और 50 की image 2 है।

मैं : सो हमें ये पता चला की अंकों की image का गुणनफल और अंकों के गुणनफल की image भी सामान है।

पिता : इस property को गणित की भाषा में homomorphism कहते हैं। और एक बहुत ही बढ़िया अंकों का सिद्धांत modulo prime अंकों की गुणा टेबल से निकल कर आता है।

मैं : क्या है वो सिद्धांत ?

पिता : जैसे 5 prime अंक है तो modulo 5 की गुणा टेबल को परखते हैं।

सुशीला : ये रही टेबल।

X5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ओहो! यहाँ तो मुझे 1,2,3,4 का लैटिन वर्ग दिख रहा है।

पिता : अब modulo 5 गणित में $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 1$, $3 \times 3 = 4$, और $3 \times 4 = 2$ होता है।

रवि : modulo 5 गणित में $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 4 = 3 \times 1 \times 4 \times 2$,

ये इसलिए क्योंकि अंकों के image का गुणनफल और अंकों के गुणनफल की image सामान होती है

मैं : इसे ऐसे भी लिख सकते हैं

modulo 5 गणित में $3^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$

पिता : क्या इसको और सरल नहीं कर सकते ?

मैं : हाँ ये तो modulo prime अंक है। हम इस समीकरण को दोनों तरफ से $1 \times 2 \times 3 \times 4$ से भाग दें तो निकलता है $3^4 = 1 \pmod{5}$

पिता : modulo 5 , $3^4 - 1$ क्या है

रवि : modulo 5, $3^4 - 1 = 0$

पिता : इसका क्या मतलब है।

मैं : modulo 5 में 0 का मतलब है वो अंक 5 से पूर्णतः विभाज्य है। यानि $3^4 / 5 = 0$

पिता : अगर हम यही प्रक्रिया दूसरी रो को लेकर करें तो।

रवि : $1^4 - 1$, 5 से विभाज्य है

$2^4 - 1$, 5 से विभाज्य है

$4^4 - 1$, 5 से विभाज्य है

पिता : हाँ। और अगर हम modulo 7 की गुणा के टेबल लें तो क्या तथ्य निकलते हैं? 7 एक prime नंबर है।

$1^6 - 1$, 7 से विभाज्य है

$2^6 - 1$, 7 से विभाज्य है

$3^6 - 1$, 7 से विभाज्य है

$4^6 - 1$, 7 से विभाज्य है

$5^6 - 1$, 7 से विभाज्य है

$6^6 - 1$, 7 से विभाज्य है

पर $7^6 - 1$, 7 से विभाज्य नहीं है। और $8^6 - 1$ का क्या? क्या वो 7 से विभाज्य है?

पिता : क्या तुम समानता के सिद्धांत लगा कर इसे सिद्ध कर सकते हो ?

मैं : मुझे कोशिश करने दो। मुझे ये दिखाना है की modulo 7 में $8^6 - 1 = 1$ हैं ना ?

पिता : कोशिश करो।

मैं : $8 = 1 \pmod{7}$

इसलिए $8^6 = 1^6 \pmod{7}$

इसलिए $8^6 = 1 \pmod{7}$ ठीक है ना ?

पिता : अब $9^6 - 1$ को देखो ?

मैं : हमें ये पता करना है की $9^6 - 1 = 0 \pmod{7}$ सही है की नहीं।

ठीक है। $9 = 2 \pmod{7}$

इसलिए $9^6 = 2^6 \pmod{7}$

अब $2^6 - 1 = 35 = 0 \pmod{7}$

इसलिए $9^6 - 1$, 7 से विभाज्य है।

पिता : तो वो बड़ा सा सिद्धांत क्या है जिस तरफ हम जा रहे हैं ?

मैं : कोई भी अभाज्य अंक (prime numbers) p ले लो। अब कोई और अंक n ले लो जो की p से अविभाज्य हो। तो $n^{p-1} - 1$, p से विभाज्य होगा। अद्भुत है। गहरी खोज है। सबसे पहले ये सिद्धांत किसने ढूँढा।

पिता : 17 वीं शताब्दी का महान एक महान फ्रांसिसी गणितज्ञ जिसका नाम फर्मेट था।

और हाँ मैं दो हफ्ते के लिए बाहर जा रहा हूँ। तब तक तुम अगर ये पता लगा सको कि किसी भी साल में किस तारीख को कौन सा दिन है, तो मुझे बहुत अच्छा लगेगा।

मैं : gregorian कैलेंडर में ?

पिता : हाँ वही। क्योंकि अब हम ज्यादातर उसी कैलेंडर का इस्तेमाल करते हैं।

रवि : पिताजी आपके आने से पहले हम इस सवाल का जवाब ढूँढने की पूरी कोशिश करेंगे। पर मेरा एक सवाल है।

सुशीला : ये गणित कितने तरह की होती है ?

पिता : जैसा की हमने देखा की गणित एक नहीं कितनी भी हो सकती हैं। जैसे 7 की गणित जो की कलेंडर में होती है, 5 की, 6 की इत्यादि। यानि अबसे हमें गणित को एक वचन में नहीं बहुवचन में प्रयोग करना होगा।

मैं : हाँ पर उसके दो ही पैटर्न होंगे या field या फिर ring।

पिता : बिल्कुल ठीक।

सुशीला : धन्यवाद पिताजी।

रवि : पिताजी हमें कैलेंडर को लेकर जो समय बिताया उसमे बहुत ही मज़ा आया।

मैं : हे भगवान! मैंने तो कभी सोचा भी नहीं था की साधारण से कलेंडर में इतनी सारी चीज़ें हैं। पिताजी आपका बहुत बहुत उपकार है।